

Paket 2

RELASI REKURSIF

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep relasi rekursif. Kajian dalam paket ini meliputi relasi rekursif linear dengan koefisien konstanta, relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta, akar rangkap, dan menyelesaikan persamaan rekursif dengan fungsi pembangkit. Paket ini sebagai pengantar ke materi Derangement sebagai paket lanjutan.

Dalam paket 2 ini, mahasiswa akan mengkaji pengertian relasi rekursif, mengidentifikasi relasi rekursif linear dengan koefisien konstanta, menganalisis relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta, serta menganalisis akar rangkap, hingga pentingnya menyelesaikan persamaan rekursif dengan fungsi pembangkit. Sebelum perkuliahan berlangsung, dosen menampilkan slide berbagai bentuk contoh relasi rekursif dalam konteks peradaban Islam untuk memancing ide-ide kreatif mahasiswa dalam upaya meningkatkan nalar piker. Mahasiswa juga diberi tugas untuk membaca uraian materi dan mendiskusikannya dengan panduan lembar kegiatan. Dengan dikuasainya dasar-dasar dari paket 2 ini diharapkan dapat menjadi modal bagi mahasiswa untuk mempelajari paket selanjutnya.

Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan Laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat membantu perkuliahan, selain itu diperlukan juga kertas plano, spidol dan isolasi sebagai alat memaparkan kreatifitas hasil perkuliahan dengan membuat peta konsep.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa memahami dengan baik relasi rekursif sebagai permasalahan diskrit dan dapat menyelesaikannya.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat :

1. Mahasiswa dapat menyebutkan definisi relasi rekursif
2. Mahasiswa dapat membuat model dalam bentuk relasi rekursif
3. Mahasiswa dapat menyelesaikan relasi rekursif dengan cara akar karakteristik fungsi pembangkit

Waktu

3 x 50 menit

Materi Pokok

1. Pengertian relasi rekursif
2. Relasi rekursif linear dengan koefisien konstanta
3. Relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta
4. Akar rangkap
5. Menyelesaikan persamaan rekursif dengan fungsi pembangkit

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan awal (20 menit)

1. Brainstorming dengan mengamati slide berbagai kejadian mengenai relasi rekursif dalam kehidupan sehari-hari
2. Penjelasan mengenai pentingnya mempelajari paket

Kegiatan Inti (110 menit)

1. Dosen menjelaskan pengertian relasi rekursif
2. Membagi mahasiswa menjadi 4 kelompok besar, kelompok dibagi berdasarkan urutan banjar bangku perkuliahan.
3. Masing-masing kelompok mendiskusikan subtema secara berpasangan :

Mahasiswa mampu memahami dengan baik relasi rekursif sebagai permasalahan diskrit dan dapat menyelesaikannya.

Bahan dan Alat

Spidol, papan, kertas plano, LCD, laptop

Langkah Kegiatan

1. Pilihlah seorang pemandu kerja kelompok dan penulis konsep hasil kerja!
2. Diskusikan materi yang telah ditentukan dengan anggota kelompok!
3. Tuliskan hasil diskusi dalam bentuk peta konsep sebagaimana dalam contoh gambar di atas!
4. Tempelkan hasil kerja kelompok di papan tulis atau dinding kelas!
5. Pilihlah satu anggota kelompok untuk presentasi!
6. Presentasikan hasil kerja kelompok secara bergiliran, dengan waktu bergiliran masing-masing 20 menit.
7. Berikan tanggapan atau klarifikasi dari presentasi.

Uraian Materi

RELASI REKURSIF

A. Pengertian Relasi Rekursif

Relasi rekursif adalah suatu topik penting dan menarik dalam kombinatorik. Banyak permasalahan dalam matematika, khususnya kombinatorik dapat dimodelkan ke dalam bentuk rekursif. Sebagai ilustrasi, ikuti uraian berikut, misalkan P_n menyatakan banyaknya permutasi dari n obyek berbeda. Jelas $P_1 = 1$. Karena hanya ada satu permutasi dari 1 obyek. Untuk $n \geq 2$, P_n diperoleh dengan cara berikut. Terdapat n kemungkinan posisi dari obyek ini akan diikuti oleh permutasi dari $n - 1$ obyek. Karena banyaknya permutasi dari $n - 1$ obyek ini adalah P_{n-1} maka terdapat hubungan $P_n = nP_{n-1}$. Dengan demikian,

$$P_1 = 1 ; P_n = nP_{n-1} , n \geq 2 \dots\dots\dots (2.1)$$

Bentuk (2.1) disebut relasi rekursif untuk P_n . Banyaknya permutasi dari n obyek, $P_1 = 1$ disebut kondisi awal. Sedangkan $P_n = nP_{n-1}$ disebut bagian rekursif dari relasi rekursif.

Sekarang perhatikan barisan bilangan Leonardo of Pisa (1202) atau lebih dikenal sebagai Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,). Misalkan F_n menyatakan suku ke- n dari barisan tersebut. Perhatikan bahwa untuk $n \geq 3$, suku ke- n barisan adalah jumlah dua suku berurutan persis di depannya. Sehingga relasi rekursif untuk F_n dapat ditulis sebagai berikut :

$$F_1 = F_2 - 1 ; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3 \dots \dots \dots (2.2)$$

Dalam relasi ini terdapat dua kondisi awal yaitu $F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$. Kalau kondisi awal ini kita rubah nilainya, maka barisan Fibonacci yang kita peroleh tentu akan berbeda dari barisan Fibonacci di atas.

Melalui berbagai perkembangannya, ternyata relasi rekursif bisa dikaitkan dengan konteks Islam melalui sebuah peninggalan bersejarah di Mesir yang sangat terkenal sebagai salah satu dari 7 keajaiban dunia yaitu Piramida. Kita tahu bahwa piramida merupakan bangun ruang limas segiempat yang mempunyai 4 buah sisi miring segitiga dengan alasnya segiempat. Melihat sisi segitiga dari Piramida ini membuat kita terinspirasi dengan Segitiga Pascal. Muncul sebuah pertanyaan, "Apa hubungan antara Segitiga Pascal dengan relasi rekursif?" Kita lihat ilustrasinya sebagai berikut :



•
•
•
Dst.

Kumpulan bilangan di atas merupakan Bilangan Segitiga Pascal yang kita tahu. Jika kita menjumlahkan bilangan yang satu dengan yang lainnya

tiap baris maka akan diperoleh ; baris ke-1 = 1, baris ke-2 = 2, baris ke-3 = 4, baris ke-5 = 8, baris ke-6 = 16, baris ke-7 = 32, baris ke-8 = 64,dst.

Misalkan P_n menyatakan suku ke- n dari barisan tersebut. Perhatikan bahwa untuk $n \geq 2$, suku ke- n barisan adalah dua kali suku persis didepannya. Sehingga relasi rekursif untuk F_n dapat ditulis sebagai berikut :

$$P_1 = 1 ; P_n = 2P_{n-1}, n \geq 2.$$

Dalam relasi ini terdapat kondisi awal yaitu $P_1 = 1$. Kalau kondisi awal ini kita ubah nilainya, maka barisan yang berasal dari jumlah bilangan Segitiga Pascal tiap baris akan berbeda. Kita tahu bahwa yang berada di puncak Piramida itu adalah 1 bongkahan batu berbentuk limas segiempat. Oleh karena itu, hubungan antara Piramida dan Bilangan Segitiga Pascal terdapat pada kondisi awal. Jika kondisi awalnya berubah, kita bisa membayangkan bahwa yang terbentuk adalah Piramida Terpasung. Artinya Piramida yang tidak memiliki puncak. Itu berarti menyalahi filosofi kerajaan Mesir kuno dimana Raja adalah 1 yaitu Fir'aun. Inilah yang membuat Allah SWT geram terhadap Fir'aun, karena dia menganggap dirinya adalah Tuhan.

Misalnya n obyek berbeda “dijajar” dalam satu baris. Kemudian kita permutasikan obyek-obyek tersebut dalam baris yang sama sedemikian hingga tidak ada obyek yang menempati tempatnya semula. Pertanyaannya adalah: ada berapa permutasi yang mungkin? Jika kita misalkan banyaknya permutasi yang dimaksud adalah D_n , maka permasalahan ini dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif seperti berikut ini:

$$D_0 = 1; D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, n \geq 1. \dots \dots \dots (2.3)$$

Dalam hal ini $D_0 = 1$ adalah syarat awal, sedangkan $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ adalah bagian rekursif dari relasi rekursif (2.3).

Setelah dimodelkan suatu masalah ke dalam bentuk relasi rekursif, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan relasi rekursif tersebut. Dalam bab ini akan dibahas beberapa teknik untuk menyelesaikan suatu relasi rekursif. Misalnya, relasi rekursif (2.2) dapat diselesaikan dengan metode “akar karakteristik”, sedangkan relasi rekursif (2.3) lebih mudah diselesaikan dengan metode fungsi pembangkit. Kita juga akan bicarakan bagaimana menyelesaikan system relasi rekursif. Di bagian akhir dari bab

ini akan dibahas sebuah masalah kombinatorik yang dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif yang melibatkan konvolusi.

B. Relasi Rekursif Linear dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum bagian rekursif dari suatu relasi rekursif linear berderajat k adalah sebagai berikut :

$$a_n + h_1(n) a_{n-1} + h_2(n) a_{n-2} + \dots + h_k(n) a_{n-k} = f(n),$$

dimana : $h_i(n)$ dan $f(n)$ adalah fungsi dalam n dan $h_k(n) \neq 0$.

Jika $f(n) = 0$ maka relasi rekursifnya disebut homogen; jika tidak demikian, disebut nonhomogen. Selanjutnya, jika untuk setiap $i \in 1, 2, 3, \dots, k, h_i(n) = \text{konstanta}$, maka relasi rekursifnya disebut relasi rekursif dengan koefisien konstanta. Misalnya,

- (i). $a_1 = a_2 = 0$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, $n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.
- (ii). $a_1 = a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, $n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear homogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.
- (iii). $a_0 = a_1 = 1$; $a_n = a_0 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_0$, $n \geq 1$ adalah relasi rekursif nonlinear.
- (iv). $D_0 = 1$; $D_n = n D_{n-1} + (-1)^n$, $n \geq 1$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen dengan koefisien non konstanta.

Perlu diperhatikan suatu relasi rekursif berderajat k terdiri dari : sebuah bagian rekursif dan k kondisi awal berurutan. Relasi rekursif demikian mendefinisikan tepat satu fungsi.

1. Relasi Rekursif Linear Homogen Dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum dari relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta adalah sebagai berikut :

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}, c_k \neq 0, \dots \quad (2.4)$$

dengan k kondisi awal, dan untuk $1 \leq i \leq k$, $c_i = \text{konstanta}$.

Pada bagian ini akan dikembangkan suatu teknik untuk menyelesaikan relasi rekursif (2.4). Untuk maksud tersebut diperlukan teorema berikut.

Teorema 2.1 : (Prinsip Superposisi)

Jika $g_1(n)$ dan $g_2(n)$ berturut-turut adalah solusi dari

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_1(n) \dots \dots \dots (2.5)$$

dan

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_2(n) \dots \dots \dots (2.6)$$

maka untuk sembarang konstanta $\hat{c}_1$ dan $\hat{c}_2$. $\hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n)$ adalah sebuah solusi dari

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = \hat{c}_1 f_1(n) + \hat{c}_2 f_2(n) \dots \dots \dots (2.7)$$

Bukti :

Karena $g_1(n)$ dan $g_2(n)$ berturut-turut adalah solusi dari (2.5) dan (2.6) maka

$$g_1(n) + c_1 g_1(n-1) + c_2 g_1(n-2) + \dots + c_k g_1(n-k) = f_1(n),$$

dan

$$g_2(n) + c_1 g_2(n-1) + c_2 g_2(n-2) + \dots + c_k g_2(n-k) = f_2(n),$$

Misal $a_n = \hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n)$ maka

$$\begin{aligned} a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} &= \hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n) + c_1 \hat{c}_1 g_1(n-1) + \hat{c}_1 g_2(n-1) + \dots \\ &\quad + c_k \hat{c}_1 g_1(n-k) + \hat{c}_1 g_2(n-k) \\ &= \hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_1 g_1(n-1) + \hat{c}_2 g_1(n-2) + \dots \\ &\quad + \hat{c}_k g_1(n-k) + \hat{c}_2 g_2(n) + \hat{c}_1 g_2(n-1) + \hat{c}_2 g_2(n-2) + \dots \\ &\quad + \hat{c}_k g_2(n-k) \\ &= \hat{c}_1 f_1(n) + \hat{c}_2 f_2(n). \end{aligned}$$

Ini berarti $\hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n)$ solusi dari (2.7). **Terbukti.**

Sebagai akibat teorema 2.1 diperoleh teorema berikut.

Teorema 2.2 :

Jika $g_1(n), g_2(n), \dots, g_k(n)$ adalah solusi-solusi dari

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = 0 \dots \dots \dots (2.8)$$

maka $\hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n) + \dots + \hat{c}_k g_k(n)$ juga solusi dari (2.8) untuk sembarang konstanta $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_k$.

Untuk menyelesaikan relasi (2.4), pertama-tama kita misalkan $a_n = x^n$, $x \neq 0$. Untuk menentukan x , kita substitusi a_i dengan x^i pada (2.4) dengan $i \in \{n, n-1, n-2, \dots, n-k\}$; diperoleh :

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_k x^{n-k} = 0.$$

Bagi kedua ruas persamaan terakhir ini dengan x^{n-k} diperoleh

$$x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \dots + c_k x^{n-k} = 0 \dots \dots \dots (2.9)$$

Persamaan (2.9) disebut persamaan karakteristik dari relasi rekursif (2.4). Pada umumnya persamaan (2.9) mempunyai k akar, beberapa diantaranya mungkin bilangan kompleks.

Jika $x_1, x_2, \dots, x_k$ adalah k akar-akar (yang berbeda) dari persamaan (2.9), maka $a_n = x_i^n : 1 \leq i \leq k$ adalah penyelesaian dari (2.4). Sehingga, berdasar teorema 2.2 untuk sebarang konstanta $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_k$:

$$\hat{c}_1 x_1^n + \hat{c}_2 x_2^n + \dots + \hat{c}_k x_k^n$$

adalah penyelesaian dari (2.4). Dengan demikian solusi umum dari relasi rekursif (2.4) adalah

$$a_n = \hat{c}_1 x_1^n + \hat{c}_2 x_2^n + \dots + \hat{c}_k x_k^n \dots \dots \dots (2.10)$$

Dari persamaan (2.10) dan k kondisi awal terbentuk suatu sistem persamaan yang terdiri dari k persamaan dengan k variabel $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_k$. Jika penyelesaian dari sistem persamaan ini kita substitusikan ke persamaan (2.10), diperoleh solusi dari relasi rekursif (2.4).

Contoh 2.1 :

Al Khawarizmi Muda selalu mencoba untuk menyelesaikan suatu permasalahan matematika. Kemudian dia mendapatkan tugas sederhana seperti berikut ini. Selesaikanlah hubungan rekursif di bawah ini.

$$a_1 = a_2 = 1 ; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3.$$

Penyelesaian :

Misalkan $a_n = x^n ; x \neq 0$. Maka bentuk rekursif $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ menjadi

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2},$$

ekuivalen dengan

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$$

bagi kedua ruas persamaan terakhir ini dengan x^{n-2} diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

yang akar-akarnya

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dan } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

sehingga solusi umum dari relasi rekursif adalah

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \quad (i)$$

karena kondisi awal $a_1 = 1$ dan $a_2 = 1$, maka dari (i) diperoleh sistem persamaan berikut :

$$1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \quad (\text{ii})$$

$$1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \quad (\text{iii})$$

Selanjutnya dari persamaan (ii) dan (iii) didapat

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ dan } c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Substitusikan nilai c_1 dan c_2 ini ke dalam persamaan (i), diperoleh penyelesaian dari relasi rekursif sebagai berikut :

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Perlu diperhatikan walau formula a_n melibatkan bilangan irasional, dapat dicek bahwa untuk setiap bilangan $n \geq 1$, a_n adalah bilangan bulat non negatif.

2. Akar Rangkap

Misalkan persamaan karakteristik (2.9) mempunyai sebuah akar rangkap, katakan x_1 akar rangkap m (artinya dari ke k akar-akar dari (2.9) terdapat m akar yang masing-masing nilainya x_1). Dapat ditunjukkan bahwa masing-masing dari : $x_1^n, nx_1^{n-1}, n^2x_1^{n-2}, \dots, n^{m-1}x_1^{n-m+1}$ adalah penyelesaian dari relasi (2.4). Ini bersama dengan teorema (2.2), menghasilkan teorema berikut.

Teorema 2.3 :

Jika persamaan karakteristik (2.9) dari relasi rekursif (2.4) mempunyai sebuah akar x_1 , katakan rangkap $m \leq k$, maka solusi umum dari (2.4) yang melibatkan x_1 mempunyai bentuk

$$c_0 x_1^n + c_1 n x_1^n + c_2 n^2 c_1^n x_1^n + \dots + c_{m-1} n^{m-1} x_1^n.$$

Contoh 2.2 :

Cari formula untuk a_n yang memenuhi relasi berikut.

$$a_n = 3 a_{n-1} + 6 a_{n-2} - 28 a_{n-3} + 24 a_{n-4}$$

dengan $a_0 = 1$; $a_1 = 2$; $a_2 = 3$ dan $a_3 = 4$.

$$a_0 = 1 ; a_1 = 3 ; a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}, n \geq 2.$$

Penyelesaian :

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi pembangkit biasa dari barisan (a_n) maka menurut definisi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Karena untuk $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 4n - 1$. Kalau kedua ruas dari persamaan ini dikali x^n kemudian “dijumlahkan” untuk $n = 2$ sampai $n = \infty$, diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 4^{n-1}) x^n,$$

Ekuivalen dengan

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1} x^n, \dots\dots\dots (2.11)$$

Ruas kiri persamaan (2.3) adalah

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x$$

$$= P(x) - 1 - 3x$$

Suku pertama ruas kanan persamaan (2.3) adalah

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n &= 2x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\ &= 2x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - a_0 \right) \\ &= 2x (P(x) - 1) \\ &= 2x P(x) - 2x \end{aligned}$$

Suku kedua ruas kanan persamaan (2.3) adalah

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n &= x \sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1} x^{n-1} \\ &= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^{n-1} - 1 \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{1-4x} - x.$$

Sehingga persamaan 2.3 menjadi

$$P(x) - 1 - 3x = 2x P(x) - 2x + \frac{x}{1-4x} - x.$$

Ekuivalen dengan

$$P(x) = \frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)}$$

Karena $\frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-4x)} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-2x)}$

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-4x)} + \frac{1}{(1-2x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (4^n + 2^n) x^n \end{aligned}$$

Dengan demikian penyelesaian yang dimaksud adalah

$$a_n = \frac{1}{2} (4^n + 2^n)$$

Catatan:

- 1) Pada dasarnya, relasi rekursif (2.4) dapat diselesaikan menggunakan fungsi pembangkit.
- 2) Untuk jenis relasi rekursif tertentu, lebih mudah diselesaikan dengan fungsi pembangkit eksponensial dari pada fungsi pembangkit biasa.

Rangkuman

1. Relasi rekursif adalah suatu topik penting dan menarik dalam kombinatorik. Banyak permasalahan dalam matematika, khususnya kombinatorik dapat dimodelkan ke dalam bentuk rekursif
2. Bentuk umum bagian rekursif dari suatu relasi rekursif linear berderajat k adalah sebagai berikut :

$$a_n + h_1(n) a_{n-1} + h_2(n) a_{n-2} + \dots + h_k(n) a_{n-k} = f(n)$$

dimana $h_i(n)$ dan $f(n)$ adalah fungsi dalam n dan $h_k(n) \neq 0$.

Jika $f(n) = 0$ maka relasi rekursifnya disebut homogen; jika tidak demikian, disebut nonhomogen. Selanjutnya, jika untuk setiap $i \in 1, 2, 3, \dots, k$, $h_i(n) = \text{konstanta}$, maka relasi rekursifnya disebut relasi rekursif dengan koefisien konstanta.

3. Bentuk umum dari relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta adalah sebagai berikut :

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}, c_k \neq 0$$

dengan k kondisi awal, dan untuk $1 \leq i \leq k$, $c_i = \text{konstanta}$.

4. Untuk jenis relasi rekursif tertentu, lebih mudah diselesaikan dengan fungsi pembangkit eksponensial dari pada fungsi pembangkit biasa.

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

- 36

Relasi Rekursif

Referensi

Al-Qur'an al-karim

Budayasa, I Ketut. *Matematika Diskrit I*. Surabaya: University Press IKIP Surabaya.1997

Kusaeri, Ettie Rukmigarsari. *Matematika Diskrit*. Malang:UIN Malang. 2003

Maman Kh, Pola Berpikir Sains. Bogor:QMM Publishing, 2012

Yusuf, Ahmad Muhammad. *Ensokopedi tematis Ayat Al-qur'an dan Hadits Jilid II* jakarta:Widya Cahaya, 2009

- Relasi Rekursif

Referensi

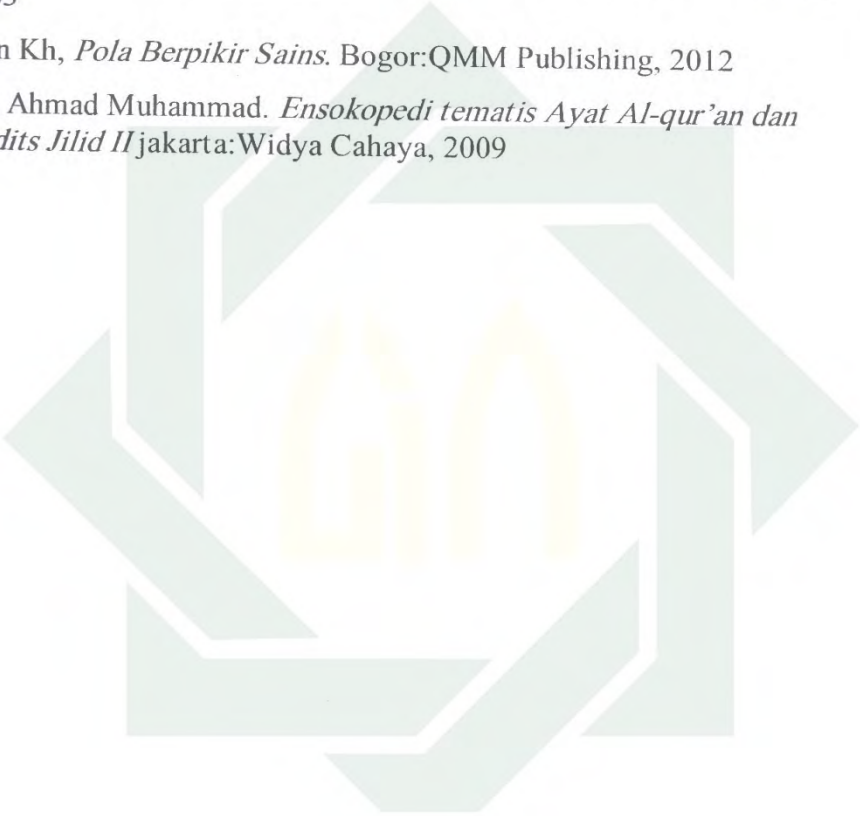
Al-Qur'an al-karim

Budayasa, I Ketut. *Matematika Diskrit I*. Surabaya: University Press IKIP Surabaya.1997

Kusaeri, Ettie Rukmigarsari. *Matematika Diskrit*. Malang:UIN Malang. 2003

Maman Kh, Pola Berpikir Sains. Bogor:QMM Publishing, 2012

Yusuf, Ahmad Muhammad. *Ensokopedi tematis Ayat Al-qur'an dan Hadits Jilid II* jakarta:Widya Cahaya, 2009



38