

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Konsep

Belajar matematika bukanlah semata menghitung dan menghafal rumus. Pembelajaran matematika yang baik akan lebih menekankan pada bagaimana siswa memahami konsep-konsep matematika dengan baik, karena siswa yang memahami konsep akan mampu *generalisasikan* pengetahuannya.¹

Para ahli psikologi menyadari pentingnya konsep, namun memang belum ada suatu definisi yang tepat untuk menggambarkan makna konsep. Definisi-definisi yang diberikan dalam kamus, seperti “sesuatu yang diterima dalam pikiran” atau “suatu ide yang umum dan abstrak” terlalu luas untuk digunakan.² Rosser berpendapat bahwa konsep adalah suatu abstraksi yang mewakili satu kelas objek, kejadian, kegiatan, atau hubungan yang mempunyai atribut yang sama.³

Terhadap suatu hal, orang mengalami stimulus yang berbeda-beda dan membentuk konsep sesuai dengan cara tertentu. Karena konsep itu adalah abstraksi-abstraksi yang berdasarkan pengalaman dan tidak ada dua orang yang mempunyai pengalaman yang persis sama, konsep yang dibentuk orang mungkin berbeda juga. Walaupun konsep kita berbeda, konsep itu cukup serupa bagi kita untuk dapat berkomunikasi dengan menggunakan nama-nama yang kita berikan pada konsep-konsep itu yang telah kita terima bersama. Menurut Dahar, untuk memahami konsep perlu memperhatikan hal-hal berikut ini:⁴

1. Nama konsep

Pemberian nama sebagai simbol *arbitrar* (sembarang) untuk sebuah konsep dimaksudkan untuk mempermudah dalam mengkomunikasikannya. Dengan menyetujui nama konsep, maka orang dapat berkomunikasi tentang konsep tersebut.

2. Atribut konsep

¹ Eka Ratna Juwita., Skripsi: “*Profil Abstraksi Siswa dalam Mengkonstruksi Hubungan Antar Segitiga*”. (Surabaya: IAIN Sunan Ampel, 2012), 16.

² Ratna Wilis Dahar. *Teori-teori Belajar dan Pembelajaran*. (Jakarta: Erlangga, 2011), 62.

³ *Ibid.*, 63.

⁴ *Ibid.*, 93.

Atribut konsep merupakan ciri-ciri konsep yang diperlukan untuk membedakan contoh dan non contoh konsep.

3. Definisi

Definisi merupakan ungkapan untuk membatasi suatu konsep. Dengan adanya definisi, orang dapat membuat ilustrasi atau gambar atau lambang dari konsep yang didefinisikan, sehingga semakin jelas apa yang dimaksud dengan suatu konsep tertentu.

4. Contoh dan non contoh

Dengan membuat daftar atribut-atribut suatu konsep, pengembangan konsep dapat diperlancar. Untuk mempermudah siswa dalam memahami konsep, hendaklah contoh konsep dipasangkan dengan noncontoh konsep. Dengan memperhatikan contoh dan noncontoh konsep, siswa dapat memahami arti konsep melalui pengalamannya. Bagi guru, hal terpenting adalah bagaimana dapat menyediakan contoh dan non contoh konsep yang relevan, cukup dan bervariasi.

B. Abstraksi

Abstraksi telah banyak dituliskan oleh para ahli matematika. Namun penelitian mengenai hal ini masih sangat sedikit. Di dalam indeks buku-buku teks matematika pun masih sangat sulit didapat. Berikut beberapa pernyataan ahli matematika.

1. Skemp menyatakan bahwa, *“Abstracting is an activity by which we become aware of similarities ... among our experiences. Classifying means collecting together our experiences on the basis of these similarities. An abstraction is some kind of lasting change, the result of abstracting, which enables us to recognise new experiences as having the similarities of an already formed class. ... to distinguish between abstracting as an activity and abstraction as its end-product, we shall ... call the latter a concept.”*⁵.

Pernyataan tersebut dalam Bahasa Indonesia kurang lebih bermakna, “proses abstraksi adalah suatu aktivitas ketika

⁵ Ati Yuliati. *Penerapan Pendekatan Concrete-Representational-Abstract (CRA) Untuk Meningkatkan Kemampuan Abstraksi Matematis Siswa SMP Dalam Pembelajaran Geometri*. repository.upi.edu. (Universitas Pendidikan Indonesia, 2013), 3.

seseorang menjadi peka terhadap karakteristik yang sama dalam pengalaman-pengalaman yang diperolehnya, kemudian kesamaan karakteristik tersebut dijadikan dasar untuk melakukan sebuah klasifikasi sehingga seseorang dapat mengenali suatu pengalaman baru dengan cara membandingkannya terhadap kelas yang sudah terbentuk dalam pikirannya terlebih dahulu. Untuk membedakan abstraksi sebagai suatu aktifitas dan abstraksi sebagai hasil akhir, maka untuk selanjutnya abstraksi sebagai hasil akhir disebut dengan konsep”.

2. Secara definitif, dalam Encarta Encyclopedia, pengertian abstrak adalah “(1) *not relating to concrete but expressing something that can only be appreciated intellectually*; (2) *not aiming to depict an object but composed with the focus on internal structure and form*”. (1) tidak berhubungan langsung dengan objek, tetapi sesuatu yang hanya dapat diekspresikan dengan argumentasi / apresiasi yang beralasan. (2) tidak mengarahkan untuk melukiskan suatu objek terfokus pada struktur internal objek.⁶
3. Gray & Tall berpendapat bahwa abstraksi adalah proses penggambaran situasi tertentu ke dalam suatu konsep yang dapat dipikirkan melalui sebuah konstruksi⁷.
4. Cooney menyatakan bahwa proses berabstraksi terjadi pada saat seseorang menyadari adanya kesamaan diantara perbedaan-perbedaan yang ada.⁸
5. Soedjadi mengemukakan bahwa suatu abstraksi terjadi bila kita memandang beberapa objek kemudian kita “gugurkan” ciri-ciri atau sifat-sifat objek itu yang dianggap tidak penting atau tidak diperlukan, dan akhirnya hanya diperhatikan atau diambil sifat penting yang dimiliki bersama.⁹

⁶ Joko Wilis Putro. *Pentingnya Kemampuan Berpikir Abstrak Dalam Belajar*. On line. Di akses pada 21 Maret 2015. www.suarakumandang.com/2012/07/10.

⁷ N.N. Marsi, dkk. *Pengaruh Model Pembelajaran Kooperatif TIPE STAD dan Kemampuan Abstraksi Terhadap Prestasi Belajar Matematika Siswa*. E-Journal. Vol.4 Tahun 2014 (Program Studi Teknologi Pembelajaran, Program Pascasarjana Universitas Pendidikan Ganesha, 2014), 4.

⁸ Ibid., 4.

⁹ Soedjadi. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*. (Surabaya: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi, 1999), 125.

6. Mega Teguh Budiarto memberikan pengertian bahwa abstraksi merupakan gambaran alami tentang aktivitas mengorganisasi vertical konsep matematika yang telah dikonstruksi sebelumnya menjadi sebuah struktur matematika baru, gambaran alami dapat berupa gambar, skema atau grafik.¹⁰ Aktivitas abstraksi yang digunakan dalam abstraksi ialah mengenali, merangkai, dan mengkonstruksi.¹¹

Pernyataan-pernyataan di atas memang berbeda-beda, untuk penelitian ini diambil kesimpulan bahwa abstraksi merupakan aktivitas atau kemampuan menemukan kesamaan dari perbedaan-perbedaan yang kemudian mampu mengkonstruksikannya ke dalam suatu objek, untuk selanjutnya disebut sebagai konsep. Konsep baru dapat dituangkan dalam gambaran alami berupa gambar, skema, atau grafik. Aktivitasnya meliputi:

1. Mengenali berarti mengidentifikasi suatu struktur matematika yang telah ada sebelumnya baik pada aktivitas yang sama atau aktivitas sebelumnya. Pengenalan terhadap suatu struktur matematika yang sudah pernah dipelajari, terjadi ketika seorang siswa menyadari bahwa suatu struktur yang telah dikonstruksinya dan mungkin telah digunakan sebelumnya, sesuai dengan sesuatu situasi matematika yang diberikan. Contoh untuk aktivitas ini, siswa diberikan beberapa model belah ketupat, ia mengenali perbedaan beberapa model belah ketupat. Atribut yang digunakan untuk membedakan ialah panjang sisi dan besar sudut. Ia mengenali ciri yang sama dari beberapa model belah ketupat yaitu mempunyai empat sisi, dua sisi yang berhadapan sejajar dan sama, keempat sisinya sama, mempunyai dua sumbu simetri, mempunyai simetri putar tingkat dua dan dua diagonalnya saling tegak lurus.
2. Merangkai memiliki konotasi aplikasi yaitu menggunakan pengetahuan terstruktur untuk dirangkai menjadi kemungkinan penyelesaian dari masalah yang diberikan. Merangkai ialah mengkombinasikan unsur structural untuk mencapai tujuan yang telah ditetapkan. Pengetahuan yang digunakan pada

¹⁰ Mega Teguh Budiarto, Disertasi: “*Profil Abstraksi Siswa dalam Mengkonstruksi Hubungan Antar Segiempat*”. (Surabaya: Unesa, 2006), 9.

¹¹ Ibid., 9.

aktivitas merangkai adalah mengenali ciri suatu bangun dan definisi dari bangun tersebut.

Contoh untuk aktivitas ini, siswa mengenali ciri belah ketupat yaitu mempunyai empat sisi, dua sisi yang berhadapan sejajar dan sama, keempat sisinya sama, mempunyai dua sumbu simetri, mempunyai simetri putar tingkat dua dan dua diagonalnya saling tegak lurus. Ia juga mengenali ciri persegi yaitu mempunyai empat sisi, dua pasang sisi yang berhadapan sejajar dan sama, keempat sudut siku-siku dan diagonalnya saling tegak lurus. Ia merangkai ciri belah ketupat yang dimiliki persegi yaitu dua pasang sisi yang berhadapan sejajar dan sama, serta diagonal saling tegak lurus dan juga ciri persegi yang tidak dimiliki belah ketupat yaitu keempat sudut siku-siku.

3. Mengkonstruksi adalah mengorganisasi ciri yang dimiliki objek menjadi struktur baru yang belum dimiliki.

Contoh dalam aktivitas ini, siswa diberikan model persegi dan belah ketupat. Ia mengenali ciri belah ketupat yaitu mempunyai empat sisi, dua sisi yang berhadapan sejajar dan sama, keempat sisinya sama, mempunyai dua sumbu simetri, mempunyai simetri putar tingkat dua dan dua diagonalnya saling tegak lurus. Ia juga mengenali ciri persegi yaitu mempunyai empat sisi, dua pasang sisi yang berhadapan sejajar dan sama, keempat sudut siku-siku dan diagonalnya saling tegak lurus. Ia merangkai, jika ciri belah ketupat ditambah ciri “sisinya sama panjang”, maka ciri tersebut merupakan ciri persegi. Ia juga mengkonstruksi himpunan persegi adalah himpunan bagian dari belah ketupat.

Proses abstraksi yang berlangsung dengan beberapa aktivitas tersebut di atas dilakukan siswa dengan menggunakan atribut atau ciri-ciri yang dimiliki oleh objek. Atribut ini dikelompokkan menjadi tiga, yaitu atribut rutin, atribut nonrutin, dan atribut tak bermakna. Berikut penjelasannya:¹²

1. Atribut rutin yaitu atribut yang lazim dipelajari di sekolah pada permulaan membangun pengertian suatu konsep.
2. Atribut non rutin yaitu atribut yang tidak lazim dipelajari di sekolah pada permulaan membangun pengertian konsep.

¹² Ibid., 32.

3. Atribut tak bermakna, yaitu atribut yang tidak dapat digunakan sebagai permulaan membangun awal pengertian konsep.

Penelitian ini akan mendeskripsikan profil abstraksi siswa sebagai proses bagaimana siswa mengenali bentuk-bentuk geometri berdimensi tiga atau bangun ruang, ciri-ciri dan pengertian bangun ruang, merangkai ciri-ciri yang dimiliki oleh beberapa bangun ruang untuk mengkonstruksi hubungan antar bangun ruang tersebut.

Untuk mengobservasi abstraksi tersebut digunakan mengenali, merangkai, dan mengkonstruksi¹³. Aksi mengkonstruksi tidak hanya mengikuti mengenali dan merangkai dalam bentuk linier, tetapi serentak memerlukan mengenali, merangkai, dan mengkonstruksi¹⁴. Hubungan antara aksi-aksi ini secara alamiah menimbulkan sebuah model abstraksi dimana seseorang dapat mengidentifikasi mekanisme umum. Konstruksi sebuah struktur baru didasarkan pada mengenali dan merangkai sebagai upaya pertama dalam mengidentifikasi mekanisme umum.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa dalam aktivitas abstraksi ini dimungkinkan adanya penggunaan atribut-atribut rutin, nonrutin, ataupun atribut-atribut tak bermakna. Berikut penjelasan mengenai indikator untuk mengenali tiap aktivitas abstraksi siswa yang digunakan dalam penelitian ini.

1. Profil aktivitas mengenali bangun ruang
 Pada aktivitas ini, siswa telah mampu mengelompokkan bangun ruang. Atribut yang mungkin digunakan adalah:
 - a. Atribut rutinnya adalah panjang rusuk, jenis bidang sisi dan alas, luas bidang sisi dan alas, dan banyak bidang sisi.
 - b. Atribut non rutin adalah sumbu simetri, simetri putar, besar sudut, dan ukuran bangun.
 - c. Atribut tak bermakna adalah rumah, gunung, dan kaleng susu.
2. Profil merangkai ciri-ciri yang sama dari beberapa bangun ruang
 Pada aktivitas ini siswa telah mampu:
 - a. Menyebutkan ciri-ciri bangun ruang dari masing-masing kelompok

¹³ Ibid, 24

¹⁴ Ibid., 7.

- b. Mendefinisikan dari masing-masing kelompok bangun ruang
- c. Merangkai ciri-ciri yang sama dari setiap kelompok bangun ruang.

Atribut yang mungkin digunakan adalah:

- a. Atribut rutinnya adalah panjang rusuk, jenis bidang sisi dan alas, luas bidang sisi dan alas, dan banyak bidang sisi.
 - b. Atribut non rutinnya adalah sumbu simetri, simetri putar, besar sudut, dan ukuran bangun.
 - c. Atribut tak bermaknanya adalah rumah, gunung, dan kaleng susu.
3. Profil mengkonstruksi pengertian dan hubungan antar bangun ruang
- Pada aktivitas ini siswa telah mampu menggunakan ciri-ciri atau atribut-atribut pada proses mengenali dan merangkai untuk membangun atau menghasilkan suatu konsep baru.

Contoh:

Aktivitas mengenali bangun ruang dilakukan dengan siswa diberikan beberapa model dari bangun ruang, ia mampu untuk mengelompokkan berdasarkan kesamaan-kesamaan yang dimilikinya dari beberapa model bangun ruang itu. Sedangkan pertimbangan atau atribut yang digunakan untuk mengelompokkannya adalah panjang rusuk, jenis sisi, jenis alas ataupun tutup, jumlah titik sudut, dan sebagainya.

Aktivitas merangkai ciri-ciri yang sama dari beberapa model bangun ruang ditandai dengan siswa mengetahui ciri dari tabung yaitu dua sisi berupa lingkaran yang kongruen dan sejajar yang selanjutnya disebut sebagai alas, mempunyai garis-garis penghubung titik-titik bersesuaian pada dua alas sejajar tersebut¹⁵. Ia juga mengenali ciri prisma segiempat yaitu dua sisi berupa segiempat yang kongruen dan sejajar yang selanjutnya disebut sebagai alas, mempunyai sisi yang bersesuaian menghubungkan dua alas sejajar tersebut sehingga berupa empat buah segiempat.¹⁶ Siswa mendefinisikan pengertian tabung sebagai bangun ruang

¹⁵ John A. Van de Walle, "Matematika Sekolah Dasar dan Menengah Jilid 2", diterjemahkan oleh Suryono, (Jakarta: Erlangga, 2008), 165.

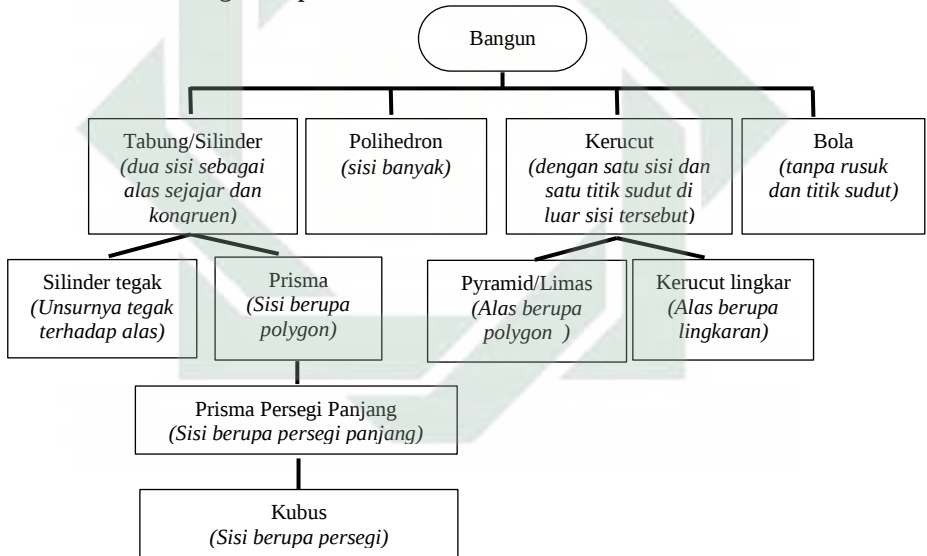
¹⁶ Susanah & Hartono, *Geometri*. (Unesa University Press, 2004), 197.

yang memiliki alas berupa lingkaran yang kongruen dan sejajar, sedangkan prisma segiempat adalah bangun ruang yang memiliki alas berupa segiempat sejajar dan kongruen. Dari ciri-ciri dan definisi yang diberikan tersebut siswa dapat mengetahui bahwa ciri yang sama dari kedua bangun ruang tersebut adalah sama-sama mempunyai dua alas yang sejajar dan kongruen.

Aktivitas mengkonstruksi hubungan antar bangun ruang dilakukan siswa dengan membuat konstruk atau skema berdasar kesamaan dari pengertian maupun ciri dari kedua bangun ruang tersebut, sehingga diketahui bahwa prisma segiempat termasuk dalam tabung, hal ini dikarenakan keduanya sama-sama memiliki dua alas sejajar dan kongruen.

Hubungan yang mungkin dibuat oleh siswa adalah:

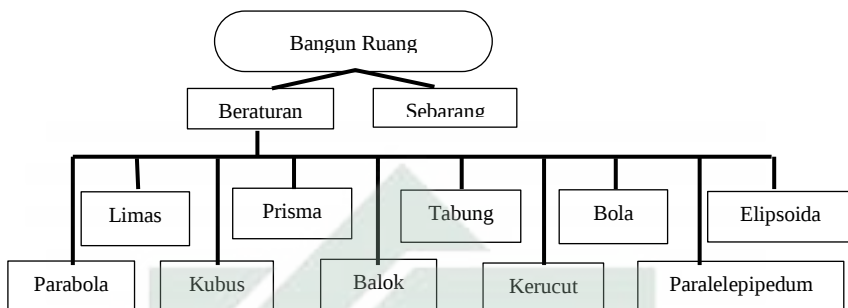
a. Kemungkinan pertama¹⁷,



Gambar 2.1
Kemungkinan Skema Pertama

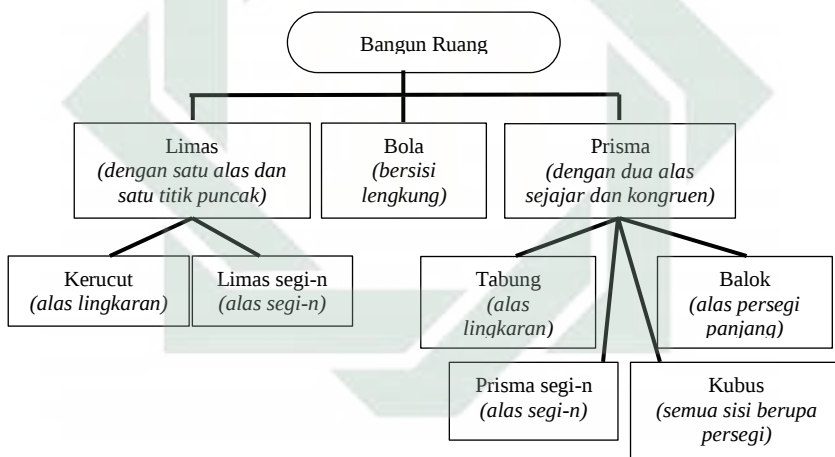
¹⁷ John A. Van de Walle, "Matematika Sekolah Dasar dan Menengah Jilid 2", diterjemahkan oleh Suryono, (Jakarta: Erlangga, 2008), 150.

b. Kemungkinan kedua¹⁸,



Gambar 2.2
Kemungkinan Skema Kedua

c. Kemungkinan ketiga¹⁹



Gambar 2.3
Kemungkinan Skema Ketiga

¹⁸ Ahsanul In'am, *Pengantar Geometri*, (Malang: UMM Press, 2003), 9.

¹⁹ Susanah & Hartono, *Geometri*, (Unesa University Press, 2004), 176-237.

C. Kemampuan *Rigorous Mathematical Thinking*

Teori *Rigorous mathematical thinking* (RMT) atau berpikir matematis rigor pertama kali dicetuskan oleh James T. Kinard pada tahun 2000. Teori ini dibangun berdasar pada dua teori utama, yaitu Teori Psikologi Vygotski dan Teori Belajar Feuerstein.²⁰

Dalam paradigma RMT yang spesifik, proses kognitif yang terdefiniskan dengan baik membawa kepada prosedur dan operasi matematika. Alat-alat kognitif yang spesifik secara matematis, melalui hubungan-hubungan fungsi atau susunannya, mengorganisir dan mengintegrasikan penggunaan operasi matematika dan proses-proses untuk membangun pemahaman konsep matematis secara sistematis.²¹

Rigorous Mathematical Thinking atau RMT didefinisikan sebagai perpaduan dan pemanfaatan operasi mental untuk:²²

- a. Memperoleh pengetahuan tentang pola dan hubungan;
- b. Menerapkan peralatan dan skema yang diperoleh secara kultural untuk menguraikan pengetahuan tersebut bagi organisasinya, korelasinya, teknik mengarangnya dan representasi abstraknya untuk membentuk pemahaman dan pengertian;
- c. Merencanakan penggunaan ide-ide tersebut untuk memfasilitasi penyelesaian masalah dan penurunan pengetahuan baru dalam berbagai konteks dan bidang aktivitas manusia; serta
- d. Melakukan pemeriksaan kritis, analisis, instropeksi dan pemantauan struktur, operasi dan proses RMT untuk pemahaman dirinya dan integritas intrinsiknya.

Proses berpikir matematis rigor adalah langkah-langkah berpikir individu dalam kegiatan matematik atau dalam menyelesaikan tugas matematik yang melibatkan penggunaan beberapa fungsi kognitif matematis. Fungsi kognitif matematis ini dapat dikategorikan dalam tiga level, yaitu level berpikir kualitatif,

²⁰ James.T Kinard & Alex Konzulin. *Rigorous Mathematical Thinking: Conceptual Formation in The Mathematics Classroom*. (Cambridge: Cambridge University Press, 2008), 2.

²¹ *Ibid.*, 3.

²² Alim Sumarno, *Identifikasi Kemampuan Siswa Dalam Menyelesaikan Masalah Pembuktian Trigonometri Ditinjau Dari Fungsi Kognitif Rigorous Mathematical Thinking*. (Jurnal Online. MATHEdunesa Vol.3 No.1 Tahun 2014), 3.

level berpikir kuantitatif, dan level berpikir relasional abstrak.²³ Ketiga level fungsi kognitif itu secara bersama-sama mendefinisikan proses mental dari ketrampilan kognitif umum ke fungsi kognitif matematis khusus tingkat lebih tinggi. Berikut disajikan tabel mengenai level fungsi kognitif RMT yang dituliskan Kinard,²⁴

Tabel 2.1
Fungsi Kognitif RMT

Fungsi kognitif	Keterangan	Simbol
Level 1 Fungsi Kognitif Berfikir Kualitatif		
Pelabelan-visualisasi (<i>labelling-visualizing</i>)	Memberi suatu nama bangun berdasarkan atribut kritisnya (misalnya simbol sejajar, sama panjang, siku-siku) ketika menkonstruksi gambar (bangun) dalam pikiran atau menghasilkan konstruksi yang terinternalisasi dari sebuah objek yang namanya diberikan.	A-1
Pembandingan (<i>comparing</i>)	mencari persamaan dan perbedaan (dalam hal ciri atau atribut kritisnya) antara dua atau lebih objek.	A-2
Pencarian secara sistematis untuk mengumpulkan dan melengkapi informasi (<i>searching systematically to gather clear and complete information</i>)	memperhatikan (misal gambar) dengan seksama, terorganisir, dan penuh rencana untuk mengumpulkan dan melengkapi informasi.	A-3

²³ Arie Mangestoe Juani, Thesis: “*Proses Berpikir Matematis Rigor Siswa Sma Kelas XII IPA Dalam Menyelesaikan Masalah Luas Daerah Ditinjau Dari Gaya Kognitif*”. (Surabaya: UNESA, 2013), 11.

²⁴ James, T Kinard & Alex Konzulin. *Rigorous Mathematical Thinking: Conceptual Formation in The Mathematics Classroom*. (Cambridge: Cambridge University Press, 2008), 86.

Penggunaan lebih dari satu sumber informasi (<i>using more than one source of information</i>)	bekerja secara mental dengan lebih dari satu konsep pada saat yang sama (warna, ukuran, bentuk atau situasi dari berbagai sudut pandang) atau menguji situasi dari berbagai sudut pandang.	A-4
Penyandian-pemecahan kode (<i>Encoding-Decoding</i>)	memaknai (objek) ke dalam kode/symbol dan mengartikan suatu kode/symbol suatu objek.	A-5
Level 2 Fungsi Kognitif Berpikir Kuantitatif dengan Ketelitian		
Pengawetan ketetapan (<i>Conserving constancy</i>)	mengidentifikasi dan menjelaskan apa yang tetap sama dalam hal atribut, konsep atau hubungan ketika yang lainnya berubah.	B-1
Pengukuran ruang dan hubungan spasial (<i>Quantifying space and spatial relationships</i>)	menggunakan referensi internal / eksternal sebagai panduan atau panduan terpadu untuk mengatur, menganalisis, membantu mengartikulasikan, dan mengukur perbedaan, representasi ruang dan hubungan spasial berdasarkan hubungan keseluruhan ke sebagian.	B-2
Pengukuran waktu dan pengukuran tempat (<i>Quantifying time and temporal relationships</i>)	Menetapkan referensi untuk mengkategorikan, mengukur, dan waktu dan hubungan temporal berdasarkan hubungan keseluruhan ke sebagian.	B-3
Penganalisisan (<i>analyzing</i>)	memecahkan keseluruhan atau menguraikan kuantitas ke dalam atribut kritis atau susunannya.	B-4
Pengintegrasian (<i>integrating</i>)	membangun keseluruhan dengan menggabungkan bagian-bagian atau atribut kritisnya, atau menyusun sebuah kuantitas dengan menggabungkan kuantitas lainnya secara bersama.	B-5
Penggeneralisasian (<i>Generalizing</i>)	mengamati dan menggambarkan sifat suatu objek tanpa merujuk ke rincian khusus ataupun atribut kritisnya	B-6

Ketelitian (<i>Being precise</i>)	menyimpulkan/ memutuskan dengan fokus dan tepat	B-7
Level 3 Fungsi Kognitif Berpikir Relasional Abstrak		
Pengaktifan pengetahuan matematika sebelumnya (<i>Activating prior mathematically related knowledge</i>)	menghimpun pengetahuan sebelumnya untuk menghubungkan dan menyesuaikan aspek yang sedang dipikirkan dengan aspek pengalaman sebelumnya.	C-1
Penyediaan dan pelafalan bukti matematika logis (<i>providing and articulating mathematical logical evidence</i>)	memberikan rincian pendukung, petunjuk, dan bukti yang masuk akal untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan, hipotesis, ataupun dugaan; membangun dugaan, pertanyaan, pencarian jawaban, dan mengkomunikasikan penjelasan yang sesuai dengan aturan matematika dan memastikan kekonsistenan yang logis.	C-2
Pendefinisian masalah (<i>defining the problem</i>)	mencermati masalah dengan menganalisis dan melihat hubungan untuk mengetahui secara tepat apa yang harus dilakukan secara matematis.	C-3
Berpikir inferensial – hipotesis (<i>Inferential - Hypothetical thinking</i>)	Membentuk proposisi matematika atau dugaan dan mencari bukti matematis untuk mendukung atau menyangkal proposisi atau dugaannya tersebut; mengembangkan generalisasi dan bukti yang valid berdasarkan sejumlah kejadian matematika.	C-4
Pemroyeksian dan restrukturisasian hubungan (<i>Projecting and restructuring relationships</i>)	membuat hubungan antara objek atau kejadian yang tampak dan membangun kembali keberadaan hubungan antara objek atau kejadian untuk memecahkan masalah baru.	C-5

Pembentukan hubungan kuantitatif proporsional (<i>forming proportional quantitative relationships</i>)	menetapkan hubungan kuantitatif yang menghubungkan konsep A dan konsep B atau antara konsep yang sama dalam dua konteks yang berbeda dengan menentukan beberapa banyaknya konsep A dan hubungannya dengan konsep B serta tes hipotesis untuk mengetahui jumlah kelipatan dari nilai asli A dan nilai penyesuaian dari B akan menjadi hasil dari kelipatan yang sama dari nilai asli B.	C-6
Pembentukan sebuah hubungan fungsional (<i>Forming a functional relationship</i>)	Membentuk hubungan antara dua atau lebih hal yang merubah nilai mereka, sedemikian rupa perubahan bentuk jaringan atau kerja sama didalam sebuah cara yang saling bergantung atau berkaitan.	C-7
Pembentukan sebuah unit hubungan fungsional (<i>Forming a unit functional relationship</i>)	Membuat sebuah hubungan antara perubahan dalam jumlah variabel dependent yang dihasilkan oleh sebuah unit perubahan dalam jumlah untuk variabel independen yang didefinisikan oleh hubungan fungsional antara dua variabel terekspresikan dalam fungsi matematika atau persamaan aljabar.	C-8
Berpikir induktif - deduktif matematis (<i>mathematical inductif - deductive thinking</i>)	mengambil aspek dari berbagai rincian matematis yang diberikan untuk membentuk pola, mengkategorikan ke dalam hubungan atribut yang umum dan mengatur hasilnya untuk membentuk aturan matematika umum, berprinsip, rumus, panduan atau menerapkan aturan umum atau rumus untuk situasi khusus atau detail keadaan yang berhubungan hanya dengan aturan dalam kepemilikan jenis atribut dan atau kebiasaan yang ditunjukkan dengan aturan.	C-9

Berpikir analogik matematis (<i>mathematical analogical thinking</i>)	Menganalisa struktur yang dipahami dengan baik dan sebuah operasi matematika yang baru, prinsip, atau masalah, membentuk aspek relasional dari masing-masing komponen struktur secara terpisah, memetakan situasi hubungan untuk struktur yang baru, dan menggunakan pengetahuan seseorang tentang situasi yang telah dipahami dengan baik bersama dengan pemetaan untuk memahami konstruk dan wawasan mengenai situasi baru.	C-10
Berpikir silogistik matematis (<i>mathematical syllogistic thinking</i>)	Menggunakan hubungan yang terbentuk antara objek A dan B yang dinyatakan dalam proporsisi matematika bersama dengan hubungan yang dibentuk antara objek A dan C yang dinyatakan dalam sebuah proporsisi matematika kedua, untuk kemudian disimpulkan secara logis sebuah hubungan yang tidak diketahui sebelumnya antara objek B dan C.	C-11
Berpikir relasional transitif matematis (<i>mathematical transitive relational thinking</i>)	mempertimbangkan proposisi matematika yang menyajikan sebuah hubungan terurut secara kuantitatif ($>$, $<$, $=$, dsb.) antara dua objek matematika A dan B, dengan proposisi matematika kedua yang menyajikan hubungan terurut secara kuantitatif antara objek matematis A dan C dan kemudian terlibat dalam sebuah pemikiran deduktif inferensial untuk menyimpulkan secara logis hubungan terurut secara kuantitatif antara B dan C.	C-12
Penjabaran aktivitas matematika melalui kategori kognitif (<i>elaborating mathematical activity through cognitive categories</i>)	Merefleksikan dan menganalisis aktivitas matematika dan menemukan, menandai, dan mengartikulasi, secara lisan dan tertulis, menggaris bawahi dasar-dasar dan konsep-konsep matematis menggunakan bahasa matematis dan fungsi kognitif.	C-13

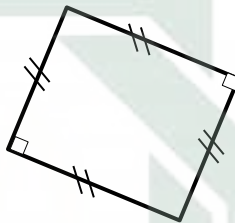
Level pertama fungsi kognitif umum membutuhkan kemampuan berpikir kualitatif dalam persetujuan dengan apapun isi atau tugasnya. Level kedua fungsi kognitif memerlukan kemampuan berpikir kuantitatif dan ketelitian. Level ketiga fungsi kognitif menghubungkan proses mengenai kuantitas dan ketelitian kedalam sebuah logika unik dan men-*generalisasi*-kan kemampuan berpikir relasional abstrak dibutuhkan kespesifikan untuk kultur matematika.

Berikut contoh soal matematika yang digunakan untuk mengidentifikasi kemampuan *rigorous mathematical thinking*.²⁵

Soal 1 : Perhatikan kedua gambar bangun berikut ini!



Gambar 1



Gambar 2

Gambar 2.4
Contoh Soal RMT

Berdasarkan ciri yang dimiliki oleh kedua gambar bangun diatas;

- Menurut pendapat kamu, disebut apakah bangun geometri yang ada di gambar 1?
- Menurut pendapat kamu, disebut apakah bangun geometri yang ada di gambar 2?
- Apakah ada ciri-ciri yang sama dari kedua bangun di atas? Jelaskan jawaban kamu!

Soal 2 : Bolehkah persegi disebut persegi panjang?

- Jika boleh, berikan alasannya.
- Jika tidak, mengapa?

²⁵ Harina Fitriyani. *Identifikasi Kemampuan Berpikir Matematis Rigor Sisiwa SMP Berkemampuan Matematika Sedang dalam Menyelesaikan Soal Matematika*. (Makalah dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema “Matematika dan Pendidikan Karakter dalam Pembelajaran”, Yogyakarta, 2011), 5.

D. Geometri Dimensi Tiga

Tujuan belajar geometri akan lebih terlihat manfaatnya ketika membaginya menjadi dua struktur. Dua hal ini sangat berbeda namun tetap terkait, yaitu logika keruangan atau pemahaman ruang, dan materi spesifik seperti yang biasanya ditemukan dalam tujuan negara dan daerah²⁶. Mengenai logika keruangan berhubungan dengan cara siswa berpikir dan memahami bentuk dan ruang. Struktur yang kedua berupa materi lebih kepada pemahaman yang lebih tradisional, seperti mengetahui tentang simetri, segitiga, dan garis sejajar. Pembuat prinsip dan standard Matematika dari NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) telah membantu menjelaskan tujuan isi ke semua tingkat. Kedua aspek geometri ini, pemahaman ruang dan materi, perlu dipahami dengan baik, sehingga pendidik dapat membantu perkembangan siswa.

Secara bebas, tujuan geometri dibagi menjadi empat, yaitu: bentuk dan sifat, transformasi, lokasi, dan visualisasi²⁷.

- a. Bentuk dan sifat mencakup pembelajaran sifat-sifat dari bentuk-bentuk baik dua maupun tiga dimensi, juga pembelajaran tentang hubungan yang terbangun dari sifat-sifat tersebut.
- b. Transformasi mencakup pembelajaran translasi, refleksi, rotasi (pergeseran, pembalikan, dan perputaran), pembelajaran simetri, dan konsep kesebangunan.
- c. Lokasi mengacu terutama kepada geometri koordinat atau cara lain dalam menentukan bagaimana benda-benda terletak dalam bidang maupun ruang.
- d. Visualisasi mencakup pengenalan bentuk-bentuk di lingkungan sekitar, pengembangan hubungan, antara benda-benda dua dimensi dengan tiga dimensi, serta kemampuan untuk menggambar dan mengenal bentuk dari berbagai sudut pandang.

Pandangan yang lebih spesifik mengenai area-area tujuan geometri diatas, berikut tujuan dan sasaran geometri (*Prinsip-*

²⁶ John A. Van de Walle, "*Matematika Sekolah Dasar dan Menengah Jilid 2*".

Diterjemahkan oleh Suryono, (Jakarta: Erlangga, 2008), 150.

²⁷ Ibid., 150.

prinsip dan Standar Matematika Sekolah) menurut NCTM tahun 2000²⁸.

Tabel 2.2

Prinsip-prinsip dan Standar Matematika Sekolah NCTM tahun 2000

STANDAR	KELAS 9-12
<i>Program pengajaran dari pra taman kanak-kanak sampai kelas 12 harus memungkinkan semua siswa untuk -</i>	Harapan Semua siswa kelas 9-12 harus -
Menganalisa karakteristik dan sifat-sifat bentuk-bentuk geometri berdimensi dua dan tiga serta mengembangkan alasan matematika tentang hubungan geometri.	• Menganalisa dan menentukan sifat-sifat benda berdimensi dua dan tiga; • Mengungkap hubungan (termasuk kongruensi dan kesebangunan) antara kelas-kelas benda geometri berdimensi dua dan tiga, membuat dan menguji dugaan tentang sifat-sifat tersebut, dan menyelesaikan masalah-masalah yang terkait; • Membuktikan kebenaran dugaan-dugaan geometri dengan menggunakan alasan deduktif, membuktikan teorema, dan memeriksa bukti yang diberikan oleh orang lain; • Menggunakan hubungan trigonometri untuk menentukan ukuran panjang dan sudut.
Menetapkan lokasi dan menggambarkan hubungan ruang dengan menggunakan geometri koordinat dan sistem penyajian yang lain.	• Menggunakan koordinat Kartesius dan sistem koordinat yang lain seperti sistem navigasi, koordinat kutub, atau koordinat bola untuk menganalisis situasi-situasi geometri; • Menyelidiki dugaan-dugaan dan menyelesaikan masalah yang melibatkan benda-benda dua dan tiga dimensi yang disajikan dalam sistem koordinat Kartesius.
Menerapkan transformasi dan	• Memahami dan menyajikan translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi dari benda-benda

²⁸ Ibid., Apendiks A.

menggunakan simetri untuk menganalisa situasi yang bersifat matematis.	dalam bidang dengan menggunakan sketsa, koordinat, vector, notasi fungsi, dan matriks; • Menggunakan berbagai macam ungkapan untuk membantu memahami pengaruh dan transformasi sederhana dan komposisinya.
Menggunakan visualisasi, alasan yang menyangkut ruang dan model geometri untuk menyelesaikan masalah.	• Menggambar dan membuat ungkapan benda-benda geometri berdimensi dua dan tiga dengan menggunakan berbagai macam alat; • Memvisualisasikan benda-benda tiga dimensi dari sudut pandang yang berbeda-beda dan menganalisa irisan-irisannya; • Menggunakan grafik sudut dan sisi untuk memodelkan dan menyelesaikan masalah; • Menggunakan model-model geometri untuk memperoleh gambaran dan menjawab pertanyaan-pertanyaan di bidang lain di luar matematika; • Menggunakan ide-ide geometri untuk memperoleh gambaran menyelesaikan masalah dalam mata pelajaran lain dan dalam bidang lain seperti seni dan arsitektur.

Berdasarkan tabel diatas, salah satu harapan untuk siswa kelas 9-12 adalah menganalisa dan menentukan sifat-sifat benda berdimensi dua dan tiga. Berikut disajikan tabel yang mendeskripsikan pengelompokan bangun ruang²⁹.

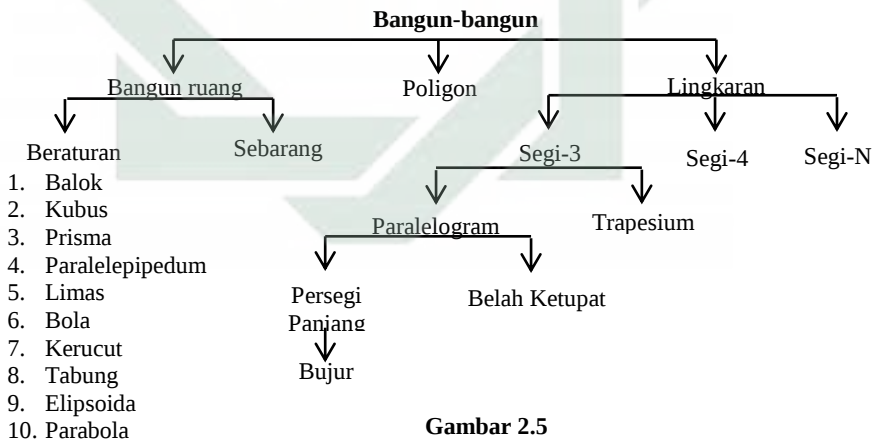
²⁹ Ibid., 165.

Tabel 2.3
Pengelompokan Bangun Ruang Menurut NCTM

Kategori Bentuk-bentuk Tiga Dimensi	
Bentuk	Deskripsi
Berdasar rusuk & titik sudut	
Bola dan bentuk seperti telur	Bentuk tanpa rusuk dan titik sudut (pojok) Bentuk dengan rusuk tanpa titik sudut (piring terbang) Bentuk dengan titik sudut tanpa rusuk (bola rugby)
Berdasar sisi dan permukaan	
Polyhedron (bangun ruang sisi banyak)	Bentuk terbuat dari semua sisi (sisi adalah permukaan rata dari bangun ruang). Jika semua permukaan adalah sisi, semua rusuk berupa garis lurus. Beberapa kombinasi sisi dan permukaan melingkar (silinder lingkaran adalah contohnya, tapi ini bukan definisi silinder). Bentuk dengan semua permukaan lengkung. Bentuk dengan atau tanpa rusuk dan dengan atau tanpa titik sudut. Sisi dapat sejajar. Sisi sejajar terletak pada bidang-bidang yang tidak pernah bersinggungan.
Silinder	
Silinder	Dua sisi kongruen, sejajar disebut alas. Garis-garis penghubung titik-titik bersesuaian pada dua alas selalu sejajar. Garis-garis sejajar ini disebut unsur-unsur silinder.
Silinder tegak	Silinder dengan unsur-unsur tegak lurus terhadap alas. Silinder yang bukan silinder tegak adalah silinder miring.
Prisma	Silinder dengan polygon sebagai alas. Semua prisma adalah kasus khusus dari silinder.
Prisma persegi panjang	Silinder dengan persegi panjang sebagai alas.

Kubus	Prisma bujur sangkar dengan sisi-sisi bujur sangkar.
Kerucut	
Kerucut	Bangun ruang dengan tepat satu sisi dan satu titik sudut yang terletak bukan di sisi. Garis lurus (unsur) dapat digambar dari sebarang titik pada rusuk alas ke titik sudut. Alas dapat berbentuk apa saja. Titik sudut tidak mesti tepat di atas alas.
Kerucut lingkar	Kerucut dengan alas lingkaran.
Pyramid	Kerucut dengan polygon sebagai alas. Semua sisi yang bergabung di titik sudut adalah segi tiga. Pyramid dinamai sesuai bentuk alas; piramida segitiga, piramida bujur sangkar, piramida segidelapan, dsb. Semua pyramid adalah kasus khusus dari kerucut.

Selain pada tabel diatas, bangun-bangun geometri dibagi secara mendetail dalam skema berikut³⁰:



Gambar 2.5
Skema Bangun-bangun Geometri

³⁰ Ahsanul In'am, *Pengantar Geometri*, (Malang: UMM Press, 2003), 9.

Berikut disajikan definisi beberapa bangun ruang oleh Susanah dan Hartono,

1. Polihedron adalah suatu ruang yang dibatasi oleh bagian-bagian dari bidang-bidang yang berpotongan.³¹
2. Polihedron beraturan adalah bangun ruang yang semua sisinya merupakan polygon yang kongruen, dan banyak polygon yang bertemu pada setiap titik sudut sama.³²
3. Balok adalah polihedron yang mempunyai enam sisi berbentuk persegi panjang.³³
4. Prisma adalah polihedron yang mempunyai dua sisi yang sejajar, sedangkan semua sisi yang lain sejajar dengan sebuah garis yang memotong pemuat-pemuat kedua sisi yang sejajar itu.³⁴
5. Sebuah prisma disebut beraturan jika prisma itu prisma tegak yang bidang alasnya berupa poligon beraturan.³⁵
6. Prisma segiempat yang alasnya berupa paralelogram (jajar genjang) disebut paralelepipedum (disingkat parpd).³⁶
7. Rhomhedron (Rhomboid) adalah paralelepipedum miring yang sisi-sisinya semuanya berupa belahketupat-belahketupat yang kongruen.³⁷
8. Limas (Piramida) adalah polyhedron yang segala titik sudutnya, kecuali satu saja terletak pada sebuah bidang.³⁸
9. Suatu limas disebut beraturan, bila bidang alasnya merupakan poligon beraturan dan proyeksi puncak pada bidang alas berimpit dengan titik pusat poligon tersebut.³⁹
10. Andaikan W bidang (datar), kurva c pada bidang W dan garis g memotong bidang W di titik P . Himpunan semua garis yang memotong kurva c dan sejajar dengan garis g disebut bidang tabung.⁴⁰ Jika kurva c berupa lingkaran maka bidang tabung disebut tabung lingkaran.

³¹ Susanah & Hartono, *Geometri*. (Unesa University Press, 2004), 197.

³² *Ibid.*, 199.

³³ *Ibid.*, 197.

³⁴ *Ibid.*, 204.

³⁵ *Ibid.*, 205.

³⁶ *Ibid.*, 205.

³⁷ *Ibid.*, 205.

³⁸ *Ibid.*, 219.

³⁹ *Ibid.*, 221.

⁴⁰ *Ibid.*, 233.

11. Andaikan u sebuah bidang dan kurva c pada bidang u . Titik P titik yang tidak terletak pada bidang u . Himpunan garis-garis yang melalui titik P dan memotong kurva c disebut bidang kerucut.⁴¹
12. Bola adalah himpunan semua titik-titik pada ruang yang berjarak sama terhadap titik tertentu (disebut pusat).⁴²

Definisi-definisi bangun ruang juga telah banyak diberikan dalam buku-buku Matematika SMP, berikut diantaranya,

1. Tabung adalah bangun ruang yang dibatasi oleh dua bidang yang berbentuk lingkaran sebagai sisi alas dan sisi atas dan sebuah bidang lengkung yang merupakan sisi tegak yang disebut selimut tabung⁴³.
2. Kerucut adalah bangun ruang yang dibatasi oleh dua sisi, yaitu sisi alas berbentuk lingkaran dan selimut kerucut⁴⁴.
3. Bola tidak mempunyai titik sudut dan rusuk. Bola hanya memiliki satu bidang sisi yang lengkung.⁴⁵
4. Kubus adalah bangun ruang yang semua sisinya berbentuk persegi dan semua rusuknya sama panjang⁴⁶.
5. Balok adalah bangun ruang yang memiliki tiga pasang sisi berhadapan yang sama bentuk dan ukurannya, di mana setiap sisinya berbentuk persegi panjang⁴⁷.
6. Prisma adalah bangun ruang yang memiliki bentuk alas dan atap yang sama bentuk dan aturannya, selain itu sisi bagian samping berbentuk persegi panjang⁴⁸.
7. Limas adalah bangun ruang dengan sisi alas dan satu titik puncak dengan sisi samping berbentuk segitiga⁴⁹.

⁴¹ Ibid., 237.

⁴² Ibid., 176.

⁴³ R. Sulaiman, dkk "Contextual Teaching and Learning Matematika: Sekolah Menengah Pertama/ Madrasah Tsanawiyah Kelas IX Edisi 4". (Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008), 40.

⁴⁴ Ibid., 47.

⁴⁵ Ibid., 54.

⁴⁶ Nuniek Avianti Agus, "Mudah Belajar Matematika 2: untuk kelas viii Sekolah Menengah Pertama/ Madrasah Tsanawiyah". (Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional, 2008), 184.

⁴⁷ Ibid., 192.

⁴⁸ Ibid., 199.

⁴⁹ Ibid., 208.

Berdasarkan definisi-definisi diatas, berikut kemungkinan atribut yang digunakan oleh siswa pada saat aktivitas mengenali dan merangkai saat proses abstraksi bangun ruang,

1. Tabung
 - i. Atribut rutin : alas dan tutup berbentuk lingkaran, sebuah bidang lengkung yang merupakan sisi tegak yang disebut selimut tabung.
 - ii. Atribut nonrutin : himpunan semua titik yang memotong suatu kurva yang melingkar di suatu bidang datar.
 - iii. Atribut tak bermakna : kaleng.
2. Bola
 - i. Atribut rutin : tanpa rusuk dan titik sudut.
 - ii. Atribut nonrutin : memiliki titik pusat yang memiliki jarak sama terhadap semua titik pada ruang.
 - iii. Atribut tak bermakna : buah melon.
3. Balok
 - i. Atribut rutin : tiga pasang sisi berhadapan yang sama bentuk dan ukurannya, enam sisinya berbentuk persegi panjang.
 - ii. Atribut nonrutin : semua sudut besarnya 90^0 , rusuk sejajarnya sama panjang, diagonal bidang berhadapan sama panjang, diagonal ruang sama panjang, bidang diagonalnya berupa persegi panjang.
 - iii. Atribut tak bermakna : kardus.
4. Kubus
 - i. Atribut rutin : enam sisi berbentuk persegi, rusuknya sama panjang.
 - ii. Atribut nonrutin : semua sudut besarnya 90^0 , diagonal bidang dan ruangnya sama panjang, bidang diagonalnya berupa persegi panjang.
 - iii. Atribut tak bermakna : kotak.
5. Limas segi-n
 - i. Atribut rutin : memiliki alas berupa segi-n dengan satu titik puncak di luar bidang alas.
 - ii. Atribut nonrutin : sisi samping berupa segitiga.
 - iii. Atribut tak bermakna : atap rumah.
6. Kerucut
 - i. Atribut rutin : mempunyai alas berupa lingkaran dan satu titik puncak.

- ii. Atribut nonrutin : mempunyai garis pelukis.
 - iii. Atribut tak bermakna : es krim, topi pak tani.
7. Prisma segi-n
- i. Atribut rutin : alas dan tutup kongruen berbentuk segi-n.
 - ii. Atribut nonrutin : jumlah sisi tegak sama dengan jumlah sisi segi-n, sisi tegak berupa persegi.
 - iii. Atribut tak bermakna : potongan kue, kotak kado.
8. Paralelepipedum
- i. Atribut rutin : semua sisinya berbentuk segiempat.
 - ii. Atribut nonrutin : besar sudut berdasar kemiringan sisi tegak dan alas.
 - iii. Atribut tak bermakna : balok miring.
9. Polihedron
- i. Atribut rutin : semua sisinya poligon.
 - ii. Atribut nonrutin : dibatasi bidang-bidang yang berpotongan.
 - iii. Atribut tak bermakna : mempunyai banyak sisi.