

**KARAKTERISTIK ALJABAR LIE DENGAN ALJABAR BCL (*BINARY
AND CONSTANT'S LIU*)**

SKRIPSI



UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A

Disusun Oleh
MUCHAMAD JAENAL ABIDIN
H72216061

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL
SURABAYA**

2019

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama : Muchamad Jaenal Abidin

NIM : H72216061

Program Studi : Matematika

Angkatan : 2016

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " KARAKTERISTIK ALJABAR LIE DENGAN ALJABAR BCL (*Binary and Constant's Liu*) ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 20 Desember 2019

Yang menyatakan,



Muchamad Jaenal Abidin

NIM. H72216061

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama : Muchamad Jaenal Abidin

NIM : H72216061

Judul Skripsi : KARAKTERISTIK ALJABAR LIE DENGAN ALJABAR
BCL (*Binary and Constant's Liu*)

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 20 Desember 2019

Pembimbing



Wika Dianita Utami, M.Sc
NIP. 199206102018012003

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama : Muchamad Jaenal Abidin
NIM : H72216061
Judul Skripsi : KARAKTERISTIK ALJABAR LIE DENGAN ALJABAR
BCL (*Binary and Constant's Liu*)

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 27 Desember 2019

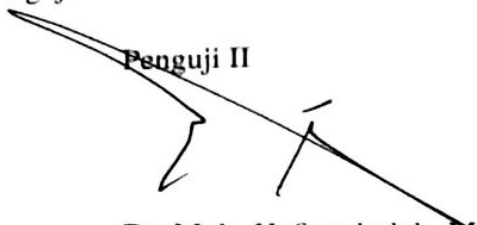
Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I



Wika Dianita Utami, M.Sc
NIP. 199206102018012003

Penguji II



Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si, M.PMat
NIP. 198002042014031001

Penguji III



Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

Penguji IV



Putrone Kcumala Intan, M.Si
NIP. 198805282018012001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya



Dr. Hj. Eni Purwati, M.Ag
NIP. 196512211990022001



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN

Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : MUCHAMAD JAENAL ABIDIN

NIM : 1172216061

Fakultas/Jurusan : SAINTEK / MATEMATIKA

E-mail address : zaenalabidin169@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :

☒ Skripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (.....)

yang berjudul :

KARAKTERISTIK ALJABAR LIE DENGAN ALJABAR BCU (BINARY
AND CONSTANT'S LIE)

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara **fulltext** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta izin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 2 Januari 2020

Penulis



(Muchamad Jaenal Abidin
nama terang dan tanda tangan

ABSTRAK

KARAKTERISTIK ALJABAR LIE DENGAN ALJABAR BCL (*Binary and Constant's Liu*)

Himpunan merupakan kumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas. Ruang vektor adalah himpunan tak kosong V atas lapangan F yang dilengkapi dengan suatu operasi $+$ yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dari ruang vektor. Suatu himpunan tak kosong X dengan konstanta 0 yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ disebut sebagai aljabar BCL (Binary and Constant's Liu), apabila memenuhi aksioma-aksioma tertentu dari aljabar BCL. Ruang vektor V atas lapangan F yang dilengkapi dengan pemetaan bilinear dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu dari aljabar Lie, maka disebut sebagai aljabar Lie. Beberapa sifat yang ada pada aljabar BCL ternyata dapat membentuk aljabar Lie, begitupun sebaliknya. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menjelaskan karakteristik dari aljabar BCL dan aljabar Lie berdasarkan pada sifat yang ada pada masing-masing aljabar, menganalisis hubungan antara aljabar Lie dengan aljabar BCL, menjelaskan definisi dari aljabar pseudo BCL serta menganalisis hubungan antara aljabar pseudo BCL dengan aljabar Lie. Berdasarkan analisa yang telah dilakukan, didapatkan sifat-sifat dari aljabar Lie, aljabar BCL dan aljabar pseudo BCL. Sifat-sifat dari aljabar Lie dapat membentuk aljabar BCL dengan syarat $x * y = [x, y] - [y, x]$, $(x * y) * z = [[x, y], z]$ dan $0 * x = 0 = [x, x]$ untuk setiap x, y, z elemen dari aljabar Lie dan jika aljabar Lie abelian, maka dapat pula membentuk aljabar BCL dengan $x = y = z$. Selain itu, sifat-sifat dari aljabar pseudo BCL dapat membentuk aljabar Lie dengan syarat $[x, y] = (x * y) - (y * x)$ untuk setiap x, y elemen dari aljabar Lie. Jika $x = y$ maka aljabar pseudo tersebut akan membentuk aljabar Lie abelian.

Kata kunci: Aljabar Lie, Aljabar BCL, Aljabar Adjoin BCL dan Aljabar Pseudo BCL

CHARACTERISTIC OF LIE ALGEBRA WITH BCL (Binary and Constant's Liu) ALGEBRA

Keywords: Lie Algebra, BCL Algebra, Adjoint BCL Algebra and Pseudo BCL Algebra.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR LAMBANG	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Rumusan Masalah	3
1.3. Tujuan Penelitian	4
1.4. Manfaat Penelitian	4
1.5. Sistematika Penulisan	5
II TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1. Himpunan	6
2.2. Grup	7
2.3. Ruang Vektor	12
2.4. Komutator	15
2.5. Aljabar Lie	17
2.6. Aljabar BCL	22
2.7. Integrasi Keilmuan	29
III HASIL DAN PEMBAHASAN	31

IV PENUTUP	45
4.1. Simpulan	45
4.2. Saran	46
DAFTAR PUSTAKA	47
A Pembuktian Tabel Aljabar BCI	49
B Pembuktian Tabel Aljabar BCK	52
C Pembuktian Tabel Aljabar BCH	57
D Pembuktian Tabel Aljabar BCL	61

$\in$: anggota
 $+$: Operasi biner penjumlahan pada bilangan
 $\circ$: Operasi hasil kali titik di $\mathbb{R}^3$
 $*$: Operasi biner pada aljabar BCL
 $\emptyset$: Himpunan kosong
 $<$: Kurang dari
 $\mathbb{Z}$: Himpunan bilangan bulat
 $\blacksquare$: akhir suatu bukti
 $\mathbb{R}$: Himpunan bilangan riil
 $\times$: Operasi hasil kali silang (*cross product*)
 $[x, y]$: Komutator dari x dan y atau disebut *Lie bracket*
 α dan β : Sebarang konstanta di lapangan

PENDAHULUAN

Selain himpunan, terdapat subkeilmuan aljabar yang lain yaitu ruang vektor

Aljabar BCI dan BCK merupakan aljabar dasar yang dijadikan bahan kajian oleh para matematikawan untuk menciptakan suatu aljabar baru. Salah satu aljabar yang berhasil ditemukan adalah aljabar BCL. Aljabar BCL diperkenalkan oleh Yonghong Liu pada tahun 2011. Yonghong Liu menemukan aljabar BCL

Aljabar Lie dan aljabar BCL merupakan aljabar yang termotivasi dari suatu grup. Terdapat beberapa sifat dari aljabar Lie yang ternyata dapat membentuk suatu aljabar BCL. Begitupun dengan sebaliknya, beberapa sifat yang ada pada aljabar BCL ternyata juga dapat membentuk suatu aljabar lie dengan beberapa kondisi tertentu yang harus dipenuhi (Liu , 2011).

1.2. Rumusan Masalah

1. Bagaimana karakteristik yang ada pada aljabar Lie dengan aljabar BCL ?.
2. Bagaimana karakteristik yang ada pada aljabar Lie dengan aljabar pseudo BCL ?.

Tujuan peneliti melakukan penelitian ini adalah:

- ## 1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagi penulis
 - a. Menambah pengetahuan dan keilmuan mengenai konsep-konsep dari karakteristik aljabar Lie dengan aljabar BCL.
 - b. Melengkapi struktur keilmuan dalam aljabar, khususnya yang berkaitan dengan karakteristik aljabar Lie dengan aljabar BCL.
2. Bagi Universitas
 - a. Sebagai bahan masukan atau referensi dalam meningkatkan standar mutu pendidikan yang diberikan.
 - b. Sebagai bahan masukan atau referensi bagi mahasiswa lain untuk melakukan penelitian yang akan datang.
 - c. Sebagai bahan masukan atau referensi bagi pihak universitas untuk melakukan penilaian terhadap tingkat pemahaman materi yang telah diterima oleh para mahasiswa.

Pada Penelitian ini akan dibagi mejadi tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir, yang masing -masing diuraikan sebagai berikut.

Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab ini berisi tentang penjelasan teori tentang definisi dan contoh dari himpunan, grup, ruang vektor, komutator, aljabar lie dan sifat-sifat aljabar Lie serta aljabar BCL dan sifat-sifat aljabar BCL.

Bab ini berisi tentang penjelasan hasil dan pembahasan mengenai sifat-sifat dari aljabar Lie dengan aljabar BCL dan sifat-sifat dari aljabar pseudo BCL dengan aljabar Lie.

Bab ini berisi tentang simpulan dan saran dari hasil penelitian yang telah diperoleh.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini akan dijelaskan mengenai definisi dan contoh dari himpunan, grup, ruang vektor, komutator, aljabar lie dan sifat-sifat aljabar lie serta aljabar BCL dan sifat-sifat aljabar BCL.

2.1. Himpunan

Himpunan merupakan istilah yang sering kali didengar saat kita belajar aljabar, terutama aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan bagian dasar dari struktur aljabar yang lain. Definisi dari himpunan adalah sebagai berikut

Definisi 2.1.1 (Bhattacharya dkk. , 1995) *Himpunan merupakan kumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas dan mempunyai karakteristik yang sama. Sekumpulan objek tersebut disebut sebagai anggota dari himpunan.*

Objek yang ada dalam suatu himpunan dapat berupa benda konkrit atau nyata seperti buku, laptop, dan lain-lain, atau dapat berupa benda abstrak seperti bilangan, fungsi, dan sejenisnya.

Misalkan X merupakan suatu himpunan. Jika x suatu objek yang ada pada X , maka x dikatakan anggota dari X dan ditulis $x \in X$. Jika himpunan X tidak memiliki anggota satupun, maka X disebut himpunan kosong dan dinotasikan dengan $X = \emptyset$.

Contoh 2.1.2 Misalkan X adalah himpunan bilangan ganjil yang kurang dari 10, maka dapat ditulis:

$$X = \{1,3,5,7,9\}$$

atau dapat ditulis sebagai:

$$X = \{ x \mid x < 10, x \in ganjil \}$$

2.2. Grup

Salah satu sistem aljabar paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma dari grup, diantaranya adalah tertutup, asosiatif, mempunyai identitas dan memiliki invers.

Definisi 2.2.1 (Raishinghamia & Anggarwal , 1980) Grup adalah suatu himpunan tidak kosong G yang tertutup terhadap operasi biner $*$, dinotasikan $(G, *)$ yang memenuhi 3 aksioma berikut:

- i. Asosiatif, yaitu untuk semua $x, y, z \in G$ berlaku $(x*y)*z = x*(y*z)$
- ii. Keberadaan elemen identitas, yaitu terdapat $e \in G$ untuk setiap $x \in G$ sebagai elemen identitas sedemikian sehingga berlaku $x * e = e * x = x$
- iii. Keberadaan elemen invers, yaitu untuk setiap $x \in G$ terdapat $x^{-1} \in G$ sebagai elemen invers sedemikian sehingga berlaku $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

Contoh 2.2.2 Diberikan matriks M dengan definisi sebagai berikut:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Terhadap operasi penjumlahan $(M, +)$ merupakan grup sebab memenuhi:

1. Sifat Tertutup

Ambil sebarang $M_1, M_2 \in M$ dengan $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, maka berlaku:

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) + v_3 &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \\&= v_1 + (v_2 + v_3)\end{aligned}$$

3. Keberadaan Elemen Identitas

Terdapat $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sebagai elemen identitas di $\mathbb{R}^2$ sedemikian hingga untuk

sebarang vektor $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ berlaku:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

4. Keberadaan Elemen Invers

Ambil sebarang sebarang vektor $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ yaitu $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, terdapat suatu

$$v_1 + v_1^{-1} = e$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ambil sebarang $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dan $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, maka berlaku:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= v_2 + v_1 \end{aligned}$$

Ruang vektor merupakan suatu himpunan semua objek yang dapat dijumlahkan satu sama lain dan dikalikan dengan sebarang bilangan, yang

Definisi 2.3.1 (Anton dan Chris , 1973) Diberikan lapangan berhingga F . Suatu himpunan tidak kosong V dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar dengan elemen di F disebut ruang vektor apabila memenuhi beberapa aksioma berikut: Untuk semua $x, y, z \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$

- ### Contoh 2.3.2 Diberikan

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Contoh 2.2.5. Selain itu juga memenuhi:

Untuk sebarang $\alpha, \beta \in F$ dan $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dan $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ berlaku:

vi. $\alpha v_1 \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \alpha v_1 &= \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

vii. $\alpha (v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

$$\begin{aligned}\alpha(v_1 + v_2) &= \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

viii. $(\alpha + \beta)v_1 = (\alpha v_1 + \beta v_1)$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)v_1 &= (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta y_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Definisi 2.5.1 (Erdmann dan Wildon , 2006) Misalkan F adalah suatu lapangan. Aljabara Lie atas lapangan F adalah suatu ruang vektor dengan pemetaan bilinear (disebut Lie Bracket):

yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- Pemetaan bilinear (*Lie Bracket*) yang ada pada aljabar Lie merupakan komutator dari x dan y . Aksioma 2 disebut sebagai identitas Jacobi. Karena *Lie Bracket* $[-,-]$ adalah pemetaan bilinear dan aksioma (1.), maka:

berakibat

Aljabar Lie dikatakan abelian apabila $[x, y] = [y, x]$, untuk semua $x, y \in L$.

Salah satu kondisi yang menyebabkan aljabar Lie L abelian terdapat pada lemma berikut ini.

Bukti.

Ambil sebarang $x, y \in L$. Dari akibat 3 didapat $[y, x] = [x, y] = -[y, x]$.

⇐ Jika $[x, y] = 0$ maka aljabar Lie L adalah abelian.



Lemma 2.5.3 Misalkan L adalah aljabar Lie. $[v, 0] = 0 = [0, v]$, untuk setiap $v \in L$.

$$0 = [v, v] = [v, v + 0] = [v, v] + [v, 0] = 0 + [v, 0] = [v, 0] = -[0, v].$$

$$[x, y] = x \times y$$

Selanjutnya, ditunjukkan operator $[-,-]$ bilinear yaitu :

- [illegible]

4. $[x, \alpha_2 y_a] = \alpha_2 [x, y_a], \forall \alpha_2 \in \mathbb{R} \forall x, y_a \in \mathbb{R}^3$

1. Untuk sebarang $x_a, x_b, y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} [x_a + x_b, y] &= ((x_{2,1} + x_{2,2})y_3 - (x_{3,1} + x_{3,2})y_2, (x_{3,1} + x_{3,2})y_1 - (x_{1,1} + x_{1,2})y_3, \\ &\quad (x_{1,1} + x_{1,2})y_2 - (x_{2,1} + x_{2,2})y_1) \\ &= (x_{2,1}y_3 - x_{3,1}y_2, x_{3,1}y_1 - x_{1,1}y_3, x_{1,1}y_2 - x_{2,1}y_1) + (x_{2,2}y_3 - x_{3,2}y_2, \\ &\quad x_{3,2}y_1 - x_{1,2}y_3, x_{1,2}y_2 - x_{2,2}y_1) \\ &= [x_a, y] + [x_b, y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\alpha_1 x_a, y] &= (\alpha_1 x_{2,1} y_3 - \alpha_1 x_{3,1} y_2, \alpha_1 x_{3,1} y_1 - \alpha_1 x_{1,1} y_3, \alpha_1 x_{1,1} y_2 - \alpha_1 x_{2,1} y_1) \\ &= \alpha_1 (x_{2,1} y_3 - x_{3,1} y_2, x_{3,1} y_1 - x_{1,1} y_3, x_{1,1} y_2 - x_{2,1} y_1) \\ &= \alpha_1 [x_a, y] \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
[x, y_a + y_b] &= ((y_{2,1} + y_{2,2})x_3 - (y_{3,1} + y_{3,2})x_2, (y_{3,1} + y_{3,2})x_1 - (y_{1,1} + y_{1,2})x_3, \\
&\quad (y_{1,1} + y_{1,2})x_2 - (y_{2,1} + y_{2,2})x_1) \\
&= (y_{2,1}x_3 - y_{3,1}x_2, y_{3,1}x_1 - y_{1,1}x_3, y_{1,1}x_2 - y_{2,1}x_1) + (y_{2,2}x_3 - y_{3,2}x_2, \\
&\quad y_{3,2}x_1 - y_{1,2}x_3, y_{1,2}x_2 - y_{2,2}x_1) \\
&= [x, y_a] + [x, y_b]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= (x \circ z)y - (x \circ y)z + (y \circ z)z - (y \circ z)x + \\ &\quad (z \circ y)x - (z \circ x)y \\ &= 0 \end{aligned}$$

Berikut ini diberikan definisi dari aljabar BCI, aljabar BCK, aljabar BCH dan aljabar BCL.

Hal ini juga berlaku untuk setiap $x, y, z \in X$

ii. $x * x = 0$

Untuk setiap $x \in X$ berlaku:

$$0 * 0 = 0$$

$$1 * 1 = 0$$

$$2 * 2 = 0$$

iii. $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ berakibat $x = y$

Pada Tabel 2.5 terlihat bahwa untuk semua $x, y \in X$, jika $x * y = 0$ dan $y * x =$

0 maka $x = y$

iv. $(x * (x * y)) * y = 0$

Untuk semua $x, y \in X$ berlaku:

$$(x * (x * y)) * y = 0$$

Misalkan $x = 0$ dan $y = 0$ maka:

$$(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$$

Hal tersebut juga berlaku untuk x dan y yang lain

Definisi 2.6.3 (Bae J. dkk. , 2018) Misalkan X adalah himpunan tidak kosong dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 . Maka struktur aljabar $(X; *, 0)$ dikatakan aljabar BCK jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

untuk semua $x, y, z \in X$

- i.* $x * x = 0$

$$ii. \quad 0 * x = 0$$

iii. $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$

$$iv. ((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$$

Pada Tabel 2.6 terlihat bahwa untuk semua $x, y \in X$, jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$

Untuk semua $x, y, z \in X$ berlaku:

Misalkan $x = 0, y = 0$ dan $z = 0$, maka:

Hal ini juga berlaku untuk semua $x, y, z \in X$

Untuk semua $x, y \in X$ berlaku:

Misalkan $x = 0, y = 0$ maka:

Hal tersebut juga berlaku pada x dan y yang lain

untuk semua $x, y, z \in X$

ii. $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$

[illegible]

i. $x * x = 0$

$$0 * 0 = 0$$

$$a * a = 0$$

$$b * b = 0$$

$$c * c = 0$$

Pada Tabel 2.6 terlihat bahwa untuk semua $x, y \in X$, jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$

Akan ditunjukkan untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku $(x * y) * z = (x * z) * y$

Misalkan $x = 0, y = 0$ dan $z = 0$, maka:

$$(0 * 0) * 0 = (0 * 0) * 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Hal ini juga berlaku untuk setiap $x, y, z \in X$

untuk setiap $x, y, z \in X$

- i.* $x * x = 0$

[illegible]

Contoh 2.6.8 Misalkan $(X; *, 0)$ adalah himpunan tidak kosong dengan konstanta 0 dan operasi biner $*$, dimana $X = \{0, 1, 2\}$. Berikut didefinisikan operasi $*$ pada X seperti pada Tabel 2.5. $(X; *, 0)$ bukan merupakan aljabar BCL sebab:

Contoh 2.6.9 Misalkan $(X; *, 0)$ adalah himpunan tidak kosong dengan konstanta 0 dan operasi biner $*$, dimana $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Berikut didefinisikan operasi $*$ pada X seperti pada tabel 2.7.

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	1
2	2	3	0	2
3	3	0	0	0

$$\begin{aligned}\text{i. } x * x &= 0 \\ 0 * 0 &= 0 \\ 1 * 1 &= 0\end{aligned}$$

$$3 * 3 = 0$$

ii. $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ berakibat $x = y$

Pada Tabel 2.7 terlihat bahwa untuk semua $x, y \in X$, jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$

iii. untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$(((x * y) * z) * ((x * z) * y)) * ((z * y) * x) = 0$$

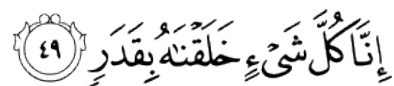
Misalkan $x = 0, y = 0, z = 0$, maka:

$$(((0 * 0) * 0) * ((0 * 0) * 0)) * ((0 * 0) * 0) = 0$$

Hal ini juga berlaku untuk setiap $x, y, z \in X$

2.7. Integrasi Keilmuan

Matematika merupakan ilmu yang sudah ada sejak beberapa abad yang lalu. Bahkan sebelum manusia diciptakan, ilmu matematika sudah ada terlebih dahulu. Hal ini dapat dibuktikan dengan adanya proses penciptaan alam semesta oleh Allah SWT yang menerapkan konsep dari matematika yakni pengukuran. Dalam proses penciptaan alam semesta, Allah SWT mengukur segala sesuatunya dengan tepat dan akurat (Fanny , 2018). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Al-Qamar/54 : 49 yaitu :



Artinya :” Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.”

Selain pengukuran dan perhitungan, dalam matematika juga ada pembuktian-pembuktian yang menggunakan logika untuk memecahkannya. Dalam membuktikan suatu teorema, dibutuhkan keuletan dan kekonsistenan agar hasil

إِنَّ رَبَّكَ هُوَ أَعْلَمُ مَنْ يَضِلُّ عَنْ سَبِيلِهِ ۖ وَهُوَ أَعْلَمُ
بِالْمُهْتَدِينَ ﴿١١٧﴾

Pada ayat tersebut, kita diwajibkan untuk selalu istiqomah di jalan yang benar agar kita tidak tersesat. Sama halnya dengan membuktikan suatu pembuktian terkait teorema, kita harus selalu konsisten untuk mengambil sebarang elemen, mendefinisikan suatu operasi atau yang lainnya supaya apa yang kita definisikan diawal dapat dijadikan suatu modal untuk membuktikan teorema-teorema yang ada.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai sifat-sifat yang ada pada aljabar Lie, aljabar BCL dan aljabar pseudo BCL. Selain itu, akan dibahas pula mengenai hubungan antara aljabar Lie dengan aljabar BCL dan hubungan antara aljabar Lie dengan aljabar pseudo BCL.

Teorema 3.0.1 Misalkan L adalah aljabar Lie. Jika untuk semua $x, y, z \in L$, didefinisikan:

(i.) $x * y = [x, y] - [y, x]$

$$(ii.) \quad (x * y) * z = [[x, y], z]$$

(iii.) $0 * x = 0 = [x, x]$

maka L adalah aljabar BCL.

Bukti. Diketahui : L adalah aljabar Lie, maka L memenuhi :

a. $[x, x] = 0$ untuk setiap $x \in L$,

b. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ untuk setiap $x, y, z \in L$.

Untuk semua $x, y, z \in L$, didefinisikan :

(i.) $x * y = [x, y] - [y, x]$

$$\text{(ii.) } (x * y) * z = [[x, y], z]$$

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= [[x, y], z] \text{ (sesuai definisi aksioma pada teorema 3.0.1 (iii))} \\
&= [(x + y), z] \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\
&= (x + y) + z \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\
&= (x + y)z - z(x + y) \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\
&= xz + yz - zx - zy \\
(x * z) * y &= [[x, z], y] \text{ (sesuai definisi aksioma pada teorema 3.0.1 (iii))} \\
&= [x + z, y] \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\
&= (x + z) + y \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\
&= (x + z)y - y(x + z) \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\
&= xy + zy - yx - yz \\
(z * y) * x &= [[z, y], x] \text{ (sesuai definisi aksioma pada teorema 3.0.1 (iii))} \\
&= [z + y, x] \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\
&= (z + y) + x \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\
&= (z + y)x - x(z + y) \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\
&= zx + yx - xz - xy
\end{aligned}$$

maka:

$$\begin{aligned}
& (((x * y) * z) * ((x * z) * y)) * ((z * y) * x) \\
&= [[(xz + yz - zx - zy), (xy + zy - yx - yz)], (zx + yx - xz - xy)] \\
&= [(xz + yz - zx - zy + xy + zy - yx - yz), (zx + yx - xz - xy)] \\
&= [(xz - zx + xy - yx), (zx + yx - xz - xy)] \\
&= (xz - zx + xy - yx) + (zx + yx - xz - xy) \\
&= (xz - zx + xy - yx)(zx + yx - xz - xy) - (zx + yx - xz - xy)(xz - zx + xy - yx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= xz zx + xzyx - (xz)^2 - xzxy - (zx)^2 - zxyx + zxxz + zxx y + xyzx + \\
&xyyx - yxyz - (xy)^2 - yxzx - (yx)^2 + yxxz + yxxy - (zxxz - (zx)^2 + \\
&zxx y - zxyx + yxxz - yxzx + yxxy - (yx)^2 - (xz)^2 + xz zx - xzxy + xzyx - \\
&xyxz + xyzx - (xy)^2 + xy yx) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Jadi, L adalah aljabar BCL.

Teorema 3.0.2 *P adalah aljabar BCL dengan $x = y = z$, untuk semua $x, y, z \in P$ jika dan hanya jika P aljabar Lie abelian.*

Bukti. Didefinisikan operasi $*$ dan $[\cdot, \cdot]$ sebagai berikut:

$$* : P \times P \rightarrow P$$

$$(x, y) \mapsto x * y = [x, y] - [y, x], \forall x, y \in P$$

$$[\cdot, \cdot] : P \times P \rightarrow P$$

$$(x, y) \mapsto [x, y] = x + y$$

dengan $x = xy$ dan $y = -yx, \forall x, y \in P$

$\Rightarrow$ Diketahui : P aljabar BCL dengan $x = y = z$. Karena P aljabar BCL maka P memenuhi:

- i. $x * x = 0$
- ii. $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ berakibat $x = y$
- iii. $((x * y) * z) * ((x * z) * y)) * ((z * y) * x) = 0$

Akan ditunjukkan bahwa P aljabar Lie abelian, dimana harus memenuhi:

1. $[x, x] = 0$ untuk setiap $x \in P$,

Ambil sebarang $x \in P$, maka diperoleh:

2. $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$

Ambil sebarang $x, y \in P$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} y * x &= [y, x] - [x, y] \text{ (sesuai definisi operasi *)} \\ &= (y + x) - (x + y) \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\ &= (-yx + xy) - (xy - yx) \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\ &= -yx + xy - xy + yx \\ &= 0 \\ &= [y, y] \text{ (sesuai dengan aksioma aljabar Lie)} \end{aligned}$$

[illegible]

Ambil sebarang $x, y, z \in P$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= ([x, y] - [y, x]) * z \text{ (sesuai definisi operasi *)} \\&= ((x + y) - (y + x)) * z \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\&= ((xy - yx) - (-yx + xy)) * z \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\&= (xy - yx + yx - xy) * z \\&= 0 * z \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x * z) * y &= ([x, z] - [z, x]) * y \text{ (sesuai definisi operasi *)} \\ &= ((x + z) - (z + x)) * y \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\ &= ((xz - zx) - (-zx + xz)) * y \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\ &= (xz - zx + zx - xz) * y \\ &= 0 * y \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z * y) * x &= ([z, y] - [y, z]) * x \text{ (sesuai definisi operasi *)} \\&= ((z + y) - (y + z)) * x \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\&= ((zy - yz) - (-yz + zy)) * x \text{ (sesuai definisi operasi bracket)} \\&= (zy - yz + yz - zy) * x \\&= 0 * x \\&= 0\end{aligned}$$

$$(((x * y) * z) * ((x * z) * y)) * ((z * y) * x)$$

maka P adalah aljabar Lie. Lebih lanjut dinotasikan P_L .

Bukti. Diketahui : P aljabar pseudo BCL, maka P memenuhi:

- dengan definisi *bracket* sebagai berikut:

Akan ditunjukkan bahwa P merupakan aljabar Lie, dimana harus memenuhi:

- Pertama harus ditunjukkan bahwa operasi *bracket* merupakan pemetaan bilinier.

Ambil sebarang $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in P$ dan $\alpha_1, \alpha_2 \in P$.

Akan ditunjukkan:

- [illegible]

$$\begin{aligned} [x, \alpha_2 y_1] &= (x * (\alpha_2 y_1)) - ((\alpha_2 y_1) * x) \\ &= (\alpha_2 (x * y_1)) - (\alpha_2 (y_1 * x)) \\ &= \alpha_2 ((x * y_1) - (y_1 * x)) \\ &= \alpha_2 [x, y_1] \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa P memenuhi aksioma aljabar BCL.

Ambil sebarang $x \in P$, maka diperoleh:

$$2. \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

$$\begin{aligned}
[x, [y, z]] &= [x, (y * z) - (z * y)] \\
&= (x * ((y * z) - (z * y))) - (((y * z) - (z * y)) * x) \\
&= (x * (y * z) - (x * (z * y))) - ((y * z) * x - ((z * y) * x)) \\
&= (x - (y - z) - (x - (z - y))) - ((y - z) - x - (z - y) - x) \\
&= (x - y + z - (x - z + y)) - (y - z - x - (z - y - x)) \\
&= (-2y + 2z) - (2y - 2z) \\
&= -4y + 4z
\end{aligned}$$

BAB IV

PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan simpulan dan saran yang diambil berdasarkan materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya mengenai sifat-sifat yang ada pada aljabar Lie, aljabar BCL dan aljabar pseudo BCL, maka penulis mendapatkan beberapa simpulan sebagai berikut :

1. Sifat-sifat aljabar Lie dengan aljabar BCL:

(i.) Misalkan L adalah aljabar Lie. Jika untuk semua $x, y, z \in L$, didefinisikan:

(a.) $x * y = [x, y] - [y, x]$

(b.) $(x * y) * z = [[x, y], z]$

(c.) $0 * x = 0 = [x, x]$

maka L adalah aljabar BCL.

(ii.) P adalah aljabar BCL dengan $x = y = z$, untuk semua $x, y, z \in P$ jika dan hanya jika P aljabar Lie abelian. Dimana untuk operasi *bracket*

- Liu, Y.H., 2011, A New Branch of the Pure Algebra: BCL-Algebras, *Advances in Pure Mathematics*, 1(5):297-299.
- Mufidah, A.S., 2011, *Ruang Vektor Fuzzy dari Matriks Fuzzy $m \times n$* , Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.
- Raishinghamia, M., dan Anggarwal, K., 1980, *Modern Algebra*, New Delhi: S. Chand & Company LTD.
- Sugiyono, 2010, *Metode Penelitian Pendidikan: Pendekatan Kuantitatif, Kualitatif dan R&D*, Bandung: ALfabet.
- Utami, W.D., 2016, *Sifat Ketereduksian Lengkap Representasi Aljabar Lie Semisederhana*, Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- Yisheng, H., 2003, *BCI-Algebra*, Beijing: Science Press.